Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer par récurrence que l'on a :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Analyse

Un grand classique, application directe du cours.

Résolution

Soit $\mathrm{P}(n)$ la propriété « $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Pour $n = 1$, on a : $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.
On a bien l'égalité, $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.

Supposons maintenant que $\mathrm{P}(n)$ soit vraie, c'est à dire que l'on ait l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Etudions $\mathrm{P}(n+1)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 \\
&= \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] \\
&= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right)
\end{aligned}$$

Pour obtenir une éventuelle factorisation de $2n^2+7n+6$, nous résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2+7x+6=0$.

On a : $\Delta = 7^2-4\times 2\times 6 = 49-48=1$.

L'équation $2x^2+7x+6=0$ admet donc les deux solutions :

$$x_1=\frac{-7-1}{2\times 2}=\frac{-8}{4}=-2 \text{ et } x_2=\frac{-7+1}{2\times 2}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$

On en déduit que le trinôme $2x^2+7x+6$ peut se factoriser comme suit :

$$2x^2+7x+6=2(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x+2)(2x+3)$$

Finalement, on a :

$$2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$$

et :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On remarque : $\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$\mathrm{P}(n+1)$ est donc vraie (la propriété P est vraie à l'ordre $n+1$).

Finalement, pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Résultat final

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$