

Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculer $S_1 = 1^3$, $S_2 = 1^3 + 2^3$, $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ et $S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.
2. D'après la question précédente conjecturer une expression simple pour S_n .
3. Démontrer le résultat de la question précédente par récurrence.

Analyse

Un exercice qui fait appel à un résultat classique sur les sommes d'entiers naturels et requiert d'être attentif (1^{ère} question).

Résolution

Question 1.

On a facilement :

$$\begin{aligned}S_1 &= 1^3 = \boxed{1} \\S_2 &= 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = \boxed{9} \\S_3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 = 9 + 27 = \boxed{36} \\S_4 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 36 + 64 = \boxed{100}\end{aligned}$$

Question 2.

On remarque d'abord que les quatre sommes calculées sont des carrés : $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $36 = 6^2$ et $100 = 10^2$.

Intéressons-nous alors aux nombres 1, 3, 6 et 10.

On remarque que l'on a : $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$ et $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

On peut conjecturer :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

Or, pour tout entier naturel non nul, on a le résultat classique : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On peut finalement conjecturer :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Question 3.

Soit $P(n)$ la propriété « $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

D'après la question 1, la propriété P est vraie aux rangs 1, 2, 3 et 4.

Supposons maintenant que $P(n)$ soit vraie, c'est à dire que l'on ait l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Etudions $P(n+1)$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} [n^2 + 4(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

On remarque : $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$

$P(n+1)$ est donc vraie (la propriété P est vraie à l'ordre $n+1$).

Finalement, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$