

Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'équation (E_n) où a est un réel strictement positif :

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x - a = 0 \quad (E_n)$$

1. Démontrer que (E_n) admet une solution unique (a_n) sur \mathbb{R}^{+*} ;
2. Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
3. En étudiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{n+1}$ déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Analyse

Les deux premières questions reviennent à étudier les zéros sur \mathbb{R}^{+*} de fonctions polynômes. La suite de ces zéros converge vers une valeur que l'on calcule à la troisième question.

Résolution

Question 1.

Pour $n \geq 1$, on définit la fonction φ_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} comme suit :

$$x \mapsto \varphi_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - a$$

En tant que fonction polynôme, φ_n est dérivable sur \mathbb{R} et admet comme dérivée :

$$x \mapsto \varphi_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 2x + 1$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \{1; 2; 3; \dots; n-1\}, x^k \geq 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi_n'(x) \geq 1$.

On en déduit que la fonction φ_n est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

Par ailleurs, φ_n est continue sur \mathbb{R}^+ en tant que fonction polynôme.

Enfin, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi_n(0) = -a (< 0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

On déduit de ce qui précède que φ_n est bijective de \mathbb{R}^+ dans $[-a; +\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que pour tout n entier naturel non nul, la fonction φ_n s'annule en une seule valeur a_n de \mathbb{R}^{+*} .

Pour tout n entier naturel non nul, la fonction φ_n s'annule en une seule valeur a_n de \mathbb{R}^{+*} .

Question 2.

Pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\varphi_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} + a_n^n + a_n^{n-1} + \dots + a_n - a = a_n^{n+1} + \underbrace{(a_n^n + a_n^{n-1} + \dots + a_n - a)}_{=\varphi_n(a_n)=0} = a_n^{n+1}$$

Puisque pour tout n entier naturel non nul, a_n est strictement positif, on en déduit qu'il en va de même pour a_n^{n+1} . Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi_{n+1}(a_n) > 0$.

Comme $\varphi_{n+1}(a_{n+1}) = 0$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi_{n+1}(a_n) > \varphi_{n+1}(a_{n+1})$.

Mais la fonction φ_{n+1} est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et on en déduit finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > a_{n+1}$$

Finalement :

La suite (a_n) est donc strictement décroissante.

La suite (a_n) est une suite de termes positifs, elle est donc minorée par 0. Par ailleurs, nous venons de démontrer qu'elle était strictement décroissante. On en déduit qu'elle converge.

La suite (a_n) est convergente.

Question 3.

On a : $a_n^n + a_n^{n-1} + \dots + a_n - a = 0$.

D'où, en multipliant par a_n qui est non nul : $a_n^{n+1} + a_n^n + \dots + a_n^2 - a.a_n = 0$.

Soit : $a_n^{n+1} + \underbrace{(a_n^n + \dots + a_n^2 + a_n - a)}_{=0} - a_n + a - a.a_n = 0$

Finalement :

$$a_n^{n+1} + a - (1+a)a_n = 0 \quad (\text{E})$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\varphi_n(1) = n - a$.

On a donc, pour toute valeur du réel a strictement positif : $\varphi_n(1) > 0$ pour $n \geq E(a) + 1$.

On a alors : $a_{E(a)+1} < 1$ et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < 1$.

Finalement :

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < 1$$

Il vient alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{n+1} = 0$.

Or, d'après l'égalité (E) obtenue précédemment, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{n+1} + a - (1+a) \times \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

On en tire, $1+a$ étant non nul : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a}{1+a}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a}{1+a}$$