Calculer les sommes suivantes :

- $S_1 = 122 + 115 + 108 + 101 + ... - 11 - 18 - 25$
- $S_2 = 12\sqrt{3} + 17\sqrt{3} + 22\sqrt{3} + ... + 222\sqrt{3} + 227\sqrt{3}$
- $S_1 = \frac{5}{2} + \frac{29}{12} + \frac{7}{3} + \frac{27}{12} + \frac{13}{6} ... - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$

Analyse

Les trois sommes proposées sont trois sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques.
Les calculs ne posent donc pas de problème dès lors que l'on parvient à déterminer, pour chaque somme, le nombre de termes qu'elle contient …

Résolution

1ère somme

On constate que $115 - 122 = 108 - 115 = 101 - 108 = -18 - (-11) = -25 - (-18) = -7$.
On a donc affaire à une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = -7$.

On pose $u_0 = 122$ et $u_n = -25$. La somme comporte alors $n+1$ termes.
Or, $u_n = u_0 + nr$. D'où : $-25 = 122 + n \times (-7)$.
Il vient alors : $n = \frac{122 + 25}{7} = \frac{147}{7} = 21$.
La somme S_1 comporte donc un total de 22 termes et on a :

$$S_1 = 22 \times \frac{122 + (-25)}{2} = \frac{22 \times 97}{2} = 11 \times 97 = 1067$$

$$\boxed{S_1 = 1067}$$

2ème somme

On constate que $17\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 22\sqrt{3} - 17\sqrt{3} = 227\sqrt{3} - 222\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.
On a donc affaire à une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 5\sqrt{3}$.

On pose $u_0 = 12\sqrt{3}$ et $u_n = 227\sqrt{3}$. La somme comporte alors $n+1$ termes.

Or, $u_n = u_0 + nr$. D'où : $227\sqrt{3} = 12\sqrt{3} + n \times 5\sqrt{3}$.

Il vient alors : $n = \frac{227-12}{5} = \frac{215}{5} = 43$.

La somme S_2 comporte donc un total de 44 termes et on a :

$$S_2 = 44 \times \frac{12\sqrt{3} + 227\sqrt{3}}{2} = 22 \times 239\sqrt{3} = 5258\sqrt{3}$$

$$\boxed{S_2 = 5258\sqrt{3}}$$

3^ème^ somme

On constate que $\frac{29}{12} - \frac{5}{2} = \frac{7}{3} - \frac{29}{12} = \frac{27}{12} - \frac{7}{3} = \frac{13}{6} - \frac{27}{12} = -\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$.

On a donc affaire à une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = -\frac{1}{12}$.

On pose $u_0 = \frac{5}{2}$ et $u_n = -\frac{1}{4}$. La somme comporte alors $n+1$ termes.

Or, $u_n = u_0 + nr$. D'où : $-\frac{1}{4} = \frac{5}{2} + n \times \left(-\frac{1}{12}\right)$.

Il vient alors : $n = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right) \times 12 = \frac{11}{4} \times 12 = 33$.

La somme S_1 comporte donc un total de 34 termes et on a :

$$S_3 = 34 \times \frac{\frac{5}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)}{2} = 34 \times \frac{\frac{9}{4}}{2} = 34 \times \frac{9}{8} = \frac{17 \times 9}{4} = \frac{153}{4}$$

$$\boxed{S_3 = \frac{153}{4}}$$