Déterminer la suite (u_n) solution de :

$$2u_n - 2u_{n-1} + 1 = \frac{1}{3^n}$$

Déterminer alors, pour la solution obtenue : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Analyse

On commence par se ramener à une forme d'équation classique : il convient alors de déterminer la solution générale de l'équation sans second membre et une suite particulière de l'équation complète.

Résolution

On a immédiatement :

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$$

Commençons par déterminer les solutions de l'équation :

$$u_n - u_{n-1} = 0$$

On veut : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n-1}$.
Il s'agit donc des suites constantes : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = k$.

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation : $u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$.

On peut d'abord rechercher une solution particulière de l'équation : $u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2}$, puis, une solution particulière de l'équation $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$.

Une solution particulière (v_n) de l'équation $u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2}$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$. Avec un premier terme nul, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{n}{2}$.

Au regard de la forme du second membre (suite géométrique) de l'équation $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$ et de ses coefficients (1 et -1 sont tels que $1\times\frac{1}{3}-1\neq 0$), on cherche une suite géométrique de même raison comme solution particulière. Soit : $w_n = \frac{w_0}{3^n}$.

La suite (w_n) est solution de l'équation $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$ si, et seulement si, on a pour tout entier naturel *n* non nul : $\frac{w_0}{3^n} - \frac{w_0}{3^{n-1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$.

D'où, en multipliant par 3^n : $-2w_0 = \frac{1}{2}$. Soit : $w_0 = -\frac{1}{4}$.

Finalement : $w_n = -\frac{1}{4}\times\frac{1}{3^n}$.

Une solution particulière de l'équation proposée est donc la suite de terme général :

$$v_n + w_n = -\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{3^n}$$

Conclusion :

L'équation $u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$ admet pour solution générale tout suite (u_n) de la forme :

$$u_n = k - \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{3^n}$$

On veut $u_0 = \frac{3}{4}$.

Or, pour $n = 0$, on a : $u_0 = k - \frac{0}{2} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{3^0} = k - \frac{1}{4}$.

On en tire : $k - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. D'où : $k = 1$.

Finalement, la solution de l'équation proposée est la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 1 - \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{3^n}$$

La suite géométrique (w_n) ayant une raison positive strictement inférieure à 1, sa limite vaut 0 : $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Par ailleurs, on a immédiatement : $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n}{2}\right) = -\infty$.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3^n}\right)=-\infty}$$