Déterminer les suites (u_n) solutions de :

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 2n+1$$

Analyse

On commence par déterminer la solution générale de l'équation sans second membre puis on cherche une solution particulière de l'équation complète en notant que la somme des coefficients de l'équation sans second membre est égale à 0.

Résolution

- Résolution de : $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \quad (E')$.

Il s'agit d'une équation récurrente linéaire du 2$^{\text{ème}}$ ordre. On cherche des suites géométriques de raison non nulle et de premier terme non nul (la suite nulle est solution) solutions de cette équation. Soit donc (u_n) une telle suite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$.

Dire que (u_n) est solution de (E') équivaut à : $u_0 \times q^{n+2} - 3u_0 \times q^{n+1} + 2u_0 \times q^n = 0$.
D'où, en tenant compte de $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$: $q^2 - 3q + 2 = 0$ (équation caractéristique).
Soit : $(q-1)(q-2) = 0$.

Cette équation admet les deux solutions : $q_1 = 1$ (on obtient ainsi toutes les suites constantes) et $q_2 = 2$.

Les solutions de l'équations $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$ sont donc les suites définies par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \times 2^n + b$, où a et b sont deux constantes réelles quelconques.

- Détermination d'une solution particulière de l'équation $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 2n+1$

Le second membre de l'égalité étant une fonction polynôme, on cherche la solution particulière sous la forme d'une fonction polynôme également. Mais 1 étant solution de l'équation caractéristique, on va chercher une fonction polynôme de degré 2.

Cherchons donc une suite (v_n), définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = an^2 + bn$, solution de l'équation $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 2n+1$ (il est inutile d'ajouter un terme constant puisque toute suite constante est solution de l'équation sans second membre).

On a facilement, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a(n+1)^2 + b(n+1) \\ &= an^2 + (2a+b)n + (a+b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= a(n+2)^2 + b(n+2) \\ &= an^2 + (4a+b)n + (4a+2b) \end{aligned}$$

Dire que la suite (v_n) est solution de l'équation $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 2n+1$ équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left[an^2 + (4a+b)n + (4a+2b)\right] - 3\left[an^2 + (2a+b)n + (a+b)\right] + 2\left[an^2 + bn\right] = 2n+1$$

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -2an + a - b = 2n+1$$

On en tire alors le système :

$$\begin{cases} -2a = 2 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

D'où : $a = -1$ et $b = -2$. Finalement, la suite (v_n) est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -n^2 - 2n$.

Résultat final

La solution générale de l'équation $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 2n+1$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \times 2^n - n^2 - 2n + b$$

où a et b sont deux constantes réelles quelconques.