Déterminer les suites (u_n) solutions de :

$$u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 2^{n+2}$$

Analyse

On commence par déterminer la solution générale de l'équation sans second membre puis on cherche une solution particulière de l'équation complète en notant que le second membre est une suite géométrique dont la raison est racine de l'équation caractéristique.

Résolution

- Résolution de : $u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 0 \quad (E')$.

Il s'agit d'une équation récurrente linéaire du 2ème ordre. On cherche des suites géométriques de raison non nulle et de premier terme non nul (la suite nulle est solution) solutions de cette équation. Soit donc (u_n) une telle suite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$.

Dire que (u_n) est solution de (E') équivaut à : $u_0 \times q^{n+2} - 4u_0 \times q^{n+1} + 4u_0 \times q^n = 0$.
D'où, en tenant compte de $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$: $q^2 - 4q + 4 = 0$ (équation caractéristique).
Soit : $(q-2)^2 = 0$.

Cette équation admet une solution double : $q = 2$.

Les solutions de l'équations $u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 0$ sont donc les suites définies par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (an+b) \times 2^n$, où a et b sont deux constantes réelles quelconques.

- Détermination d'une solution particulière de l'équation $u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 2^{n+2}$

Le second membre de l'égalité étant le terme général d'une suite géométrique de raison 2, solution double de l'équation caractéristique, on cherche la suite (v_n), solution particulière de l'équation $u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 2^{n+2}$, sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \alpha n^2 2^n$$

On a facilement, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \alpha(n+1)^2 2^{n+1} = \alpha(n^2+2n+1)2^{n+1}$$

et

$$v_{n+1} = \alpha(n-1)^2 2^{n-1} = \alpha(n^2-2n+1)2^{n-1}$$

Dire que la suite (v_n) est solution de l'équation $u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 2^{n+2}$ équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha(n^2+2n+1)2^{n+1} - 4\alpha n^2 2^n + 4\alpha(n^2-2n+1)2^n = 2^{n+2}$$

Soit, en simplifiant par 2^n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2\alpha(n^2+2n+1) - 4\alpha n^2 + 2\alpha(n^2-2n+1) = 4$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 4\alpha = 4$$

D'où : $\alpha = 1$.

La solution particulière de l'équation $u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 2^{n+2}$ est donc définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n^2 2^n$$

Les suites, solutions de l'équation $u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 2^{n+2}$, sont donc définies par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n^2 + an + b) \times 2^n$, où a et b sont deux constantes réelles quelconques.

Résultat final

Les solutions de l'équation $u_{n+1} - 4u_n + 4u_{n-1} = 2^{n+2}$ sont les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n^2 + an + b) \times 2^n$$

où a et b sont deux constantes réelles quelconques.