Déterminer de trois façons différentes le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sqrt{3n+2}$$

Analyse

La suite (u_n) est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$. De surcroît, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Les trois méthodes du cours sont utilisables.

Résolution

1ère approche

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sqrt{3(n+1)+2} - \sqrt{3n+2} \\
&= \sqrt{3n+5} - \sqrt{3n+2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n+2}\right)\left(\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+2}\right)}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+2}} \\
&= \frac{\sqrt{3n+5}^2 - \sqrt{3n+2}^2}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+2}} \\
&= \frac{3n+5-(3n+2)}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+2}} \\
&= \frac{3}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+2}}
\end{aligned}$$

Le numérateur de cette fraction est un réel strictement positif. Son dénominateur est strictement positif comme somme de deux racines carrées strictement positives.
On en déduit que la fraction est strictement positive :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

2^ème^ approche

On a remarqué que l'on avait : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$ avec *f* définie pour tout réel *x* supérieur ou égal à $-\frac{2}{3}$ par : $f : x \mapsto \sqrt{3x+2}$.

Etudions les variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction *f* est la composée de la fonction affine $x \mapsto 3x+2$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}^+, 3x+2>0$) et de la fonction racine carrée qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante.

3^ème^ approche

On a remarqué que l'on avait : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

On s'intéresse alors au rapport : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On a immédiatement, pour tout entier naturel *n* :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{3(n+1)+2}}{\sqrt{3n+2}} = \frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+2}} = \sqrt{\frac{3n+5}{3n+2}}$$

Pour tout entier naturel *n*, on a également :

$$\frac{3n+5}{3n+2} = \frac{3n+2+3}{3n+2} = \frac{3n+2}{3n+2} + \frac{3}{3n+2} = 1 + \frac{3}{3n+2}$$

Pour tout *n* entier naturel, on a : $\frac{3}{3n+2} > 0$. D'où : $1+\frac{3}{3n+2} > 1$ et, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{1+\frac{3}{3n+2}} > 1$.

Finalement, pour tout entier naturel *n*, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Cette troisième approche nous permet également de conclure que la suite (u_n) est strictement croissante.

Résultat final

La suite (u_n) est strictement croissante.