Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3n^2}{5+7n^2}$$

est bornée.

Analyse

La suite (u_n) est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$. On est naturellement conduit à étudier la fonction *f* sur $\mathbb{R}^+$.

Résolution

Etudions sur $\mathbb{R}^+$ la fonction *f* définie par :

$$f : x \mapsto \frac{3x^2}{5x^2+7}$$

La fonction *f* est dérivable en tant que fonction rationnelle et on a, pour tout réel positif :

$$f'(x) = \frac{6x \times (5x^2+7) - 3x^2 \times 10x}{(5x^2+7)^2} = \frac{42x}{(5x^2+7)^2}$$

Pour $x \neq 0$, on a donc : $f'(x) > 0$. On en déduit que la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Il vient alors : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq f(0)$. Or, $f(0) = 0$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$.
On en déduit immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. La suite (u_n) est donc minorée par 0.

On a par ailleurs :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{5x^2+7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{5x^2} = \frac{3}{5}$$

Pour tout *x* réel positif, il vient alors :

$$\frac{3}{5} - f(x) = \frac{3}{5} - \frac{3x^2}{5x^2+7} = \frac{3(5x^2+7) - 5 \times 3x^2}{5(5x^2+7)} = \frac{21}{5(5x^2+7)}$$

Cette différence est strictement positive (rapport de deux nombres strictement positifs).

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) < \frac{3}{5}$ et on en déduit immédiatement que la suite (u_n) est majorée.

En tant que suite minorée et majorée, la suite (u_n) est bornée.

Résultat final

La suite (u_n) est minorée par 0 et majorée par $\frac{3}{5}$.

En tant que suite minorée et majorée, la suite (u_n) est bornée.