Montrer que la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_n = -15\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + (-0,65)^{2n+1}$$

est convergente et calculer sa limite.

## Analyse

Les exposants intervenant dans l'expression de $u_n$ sont « faussement » complexes. Quelques manipulations élémentaires permettent de mettre en évidence la somme de deux suites géométriques …

## Résolution

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= -15\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + (-0,65)^{2n+1} \\ &= -15\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + (-0,65)\times(-0,65)^{2n} \\ &= -15\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + (-0,65)\times\left((-0,65)^2\right)^{n} \\ &= -\frac{15}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + (-0,65)\times 0,4225^{n} \end{aligned}$$

La suite $(u_n)$ apparaît ainsi comme somme de deux suites géométriques :

- La suite $(v_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -\frac{15}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ dont la raison est égale à $\frac{1}{2}$ ;
- La suite $(w_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = -0,65\times 0,4225^{n}$ dont la raison est égale à 0,4225.

Ce des raisons sont positives strictement inférieures à 1. On en déduit que les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes de limite nulle :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

Comme, par ailleurs, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + w_n$, il vient finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

## Résultat final

La suite $(u_n)$ est convergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.