Calculer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Analyse

L'exercice fait appel aux connaissances sur les sommes de termes consécutifs des suites géométriques et sur les limites des suites géométriques.

Résolution

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}
\end{aligned}$$

Remarque : la factorisation de la deuxième ligne n'est pas obligatoire.

$\frac{1}{3}$ appartenant à l'intervalle ouvert $]-1;1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

On en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} = \frac{1}{2}$.

Résultat final

La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} = \frac{1}{2}$.