

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n^2 + 5}{4n^2 + 3}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.
2. Etudier les variations de (u_n) .
3. Montrer que (u_n) est bornée.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Analyse

L'exercice fait appel aux principales notions du cours relatives aux suites de la forme $u_n = f(n)$. Ici, la fonction f est rationnelle.

Résolution

Question 1.

On étudie la différence $u_n - \frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} u_n - \frac{1}{2} &= \frac{2n^2 + 5}{4n^2 + 3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2(2n^2 + 5) - (4n^2 + 3)}{2(4n^2 + 3)} \\ &= \frac{4n^2 + 10 - 4n^2 - 3}{2(4n^2 + 3)} \\ &= \frac{7}{2(4n^2 + 3)} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , on a : $4n^2 \geq 0$ et donc $4n^2 + 3 \geq 3 > 0$.

On en déduit que la différence $u_n - \frac{1}{2}$ est strictement positive.

$\frac{1}{2}$ est donc un minorant de la suite (u_n)

Question 2.

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = f(n)$ où f est la fonction rationnelle définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5}{4x^2 + 3}$$

Etudions les variations de f sur \mathbb{R}^+ .

En tant que fonction rationnelle, f est dérivable sur cet intervalle et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x \times (4x^2 + 3) - (2x^2 + 5) \times 8x}{(4x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{\cancel{16x^3} + 12x - \cancel{16x^3} - 40x}{(4x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{-28x}{(4x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, on a donc : $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ .

Finalement :

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Question 3.

On a vu, à la première question, que la suite (u_n) était minorée. Pour montrer qu'elle est bornée, il convient donc de montrer qu'elle est majorée.

A la question précédente, on a montré que la fonction f était strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ .
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq f(0)$$

Or, $f(0) = \frac{5}{3}$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq \frac{5}{3}$.

En particulier : pour tout entier naturel n : $f(n) \leq \frac{5}{3}$, c'est à dire : $u_n \leq \frac{5}{3}$.

La suite (u_n) est donc majorée par $\frac{5}{3}$.

La suite (u_n) est minorée et majorée, elle est bornée.

Question 4.

En utilisant le théorème sur les termes de plus haut degré (sinon, on factorise au numérateur et au dénominateur par « x^2 », il vient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$