On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = -\sqrt{2n-15}$$

Déterminer le sens de variation de (u_n).

Analyse

Les élèves ne pensent pas systématiquement à étudier la fonction *f* définie par $f(x) = -\sqrt{2x-15}$ mais se lancent souvent (et courageusement ?) dans l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$. La chose est ici possible. Nous fournissons les solutions correspondant à ces deux approches.

Résolution

1ère approche

Nous étudions donc la fonction *f* définie par : $f(x) = -\sqrt{2x-15}$.

On peut calculer $f(x)$ pour tout réel *x* tel que $2x-15 \geq 0$, soit $x \geq \frac{15}{2}$.

La fonction *f* est donc définie sur $\left[\frac{15}{2};+\infty\right[$ (incidemment, on en tire que la suite (u_n) n'est pas définie pour *n* entier naturel strictement inférieur à 8).

La fonction *f* est dérivable sur $\left]\frac{15}{2};+\infty\right[$ comme composée de fonctions dérivables (la racine carré pose problème en $\frac{15}{2}$) et on a :

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{2x-15}}$$

Le numérateur est strictement négatif et le dénominateur strictement positif.
On a donc : $\forall x \in \left]\frac{15}{2};+\infty\right[,\ f'(x) < 0$.

La fonction *f* est donc strictement décroissante sur $\left[\frac{15}{2};+\infty\right[$.

On en déduit finalement :

La suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante.

2ème approche

Evaluons, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 8, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= -\sqrt{2(n+1)-15} - \left(-\sqrt{2n-15}\right) \\
&= -\sqrt{2n-13} + \sqrt{2n-15} \\
&= \sqrt{2n-15} - \sqrt{2n-13} \\
&= \frac{\left(\sqrt{2n-15} - \sqrt{2n-13}\right)\left(\sqrt{2n-15} + \sqrt{2n-13}\right)}{\sqrt{2n-15} + \sqrt{2n-13}} \\
&= \frac{\sqrt{2n-15}^2 - \sqrt{2n-13}^2}{\sqrt{2n-15} + \sqrt{2n-13}} \\
&= \frac{(2n-15) - (2n-13)}{\sqrt{2n-15} + \sqrt{2n-13}} \\
&= \frac{\cancel{2n} - 15 \cancel{-2n} + 13}{\sqrt{2n-15} + \sqrt{2n-13}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2n-15} + \sqrt{2n-13}}
\end{aligned}$$

La « difficulté » de cette approche est l'usage de l'expression conjuguée de $\sqrt{2n-15} - \sqrt{2n-13}$ (4ème ligne) pour faire apparaître une différence de deux carrés au numérateur de la fraction.

Au final, le numérateur de la fraction est strictement négatif et le dénominateur strictement positif (somme de deux racines carrées non nulles).

Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 8 on a donc : $u_{n+1} - u_n < 0$.
On a ainsi retrouvé le résultat obtenu avec la première approche.

La suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante.