

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique.
2. Etudier les variations de  $(u_n)$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est bornée.

---

## Analyse

On doit se garder de manipulations hasardeuses sur les puissances. De la valeur de la raison découlent en fait la plupart des résultats ...

---

## Résolution

### Question 1.

Notons d'abord que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $3^{n+2} > 0$  et  $5^n > 0$  (puissances de nombres strictement positifs).

On a alors, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1+2}}{5^{n+1}}}{\frac{3^{n+2}}{5^n}} = \frac{3^{n+1+2}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3^{n+2}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} \times \frac{3^{n+1+2}}{3^{n+2}} = \frac{\cancel{5^n}}{5 \times \cancel{5^n}} \times \frac{3 \times \cancel{3^{n+2}}}{\cancel{3^{n+2}}} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{5}$$

Le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  étant constant pour toute valeur de l'entier naturel  $n$ , on en déduit :

**La suite  $(u_n)$  est géométrique (sa raison valant  $\frac{3}{5}$ ).**

*Question 2.*

La suite  $(u_n)$  est à terme positifs et, pour toute valeur de l'entier naturel  $n$ , le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est strictement inférieur à 1.

On en déduit (voir théorème du cours) :

**La suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.**

*Question 3.*

On a : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ . On en déduit immédiatement que la suite  $(u_n)$  est minorée par 0.

Par ailleurs, on a vu à la question précédente que la suite  $(u_n)$  était strictement décroissante.

On a donc, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n \leq u_0$ . Or :  $u_0 = \frac{3^{2+0}}{5^0} = 3^2 = 9$ .

Donc :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 9$ . La suite  $(u_n)$  est donc majorée par 9.

La suite  $(u_n)$  étant minorée et majorée, elle est bornée.

**La suite  $(u_n)$  est bornée.**