On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3n^2 - 2}{n-1}$$

Etudier les variations de (u_n).

Analyse

Il convient en fait d'étudier les variations de la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x-1}$ sur un ensemble approprié …

Résolution

On a en fait, pour tout entier naturel *n* : $u_n = f(n)$ avec *f* définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{3x^2 - 2}{x-1}$$

La fonction *f* est dérivable sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x(x-1) - (3x^2 - 2)\times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Le dénominateur est strictement positif comme carré d'un nombre non nul.
Etudions le signe du numérateur qui est une fonction polynôme du second degré.
Raisonnons, dans un premier temps, sur $\mathbb{R}$.

Le discriminant vaut : $\Delta = (-6)^2 - 4\times 3\times 2 = 36 - 24 = 12$.

Les racines s'écrivent alors :

$\frac{6-\sqrt{12}}{2\times 3} = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \simeq 0,423$ (à 10^{-3} près) et $\frac{6+\sqrt{12}}{2\times 3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \simeq 1,577$ (à 10^{-3} près).

On en tire le signe de $3x^2-6x+2$ sur $\mathbb{R}$ puis celui de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

- Pour $x \in \left]-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$, $3x^2-6x+2>0$.
- Pour $x \in \left]\frac{3-\sqrt{3}}{3}; \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$, $3x^2-6x+2<0$.

Donc :

- $x \in \left[0; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$, $f'(x)>0$ et la fonction *f* est strictement croissante sur chacun de ces deux intervalles.
- Pour $x \in \left]\frac{3-\sqrt{3}}{3}; \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right[$, $f'(x)<0$ et la fonction *f* est strictement décroissante sur cet intervalle.

Puisque l'on a : $0<\frac{3-\sqrt{3}}{3}<1<\frac{3+\sqrt{3}}{3}<2$, on peut finalement conclure que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de $n=2$.

Résultat final

la suite (u_n) est strictement croissante à partir de $n=2$.