

Démontrer par récurrence que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^{6n+2} + 4^{6n+3} + 5^{4n+1} \text{ est un multiple de } 13$$

Analyse

Une récurrence standard ...

Résolution

On considère ici la propriété P_n « $3^{6n+2} + 4^{6n+3} + 5^{4n+1}$ est un multiple de 13 ».

Pour $n = 0$, on a : $3^{6n+2} + 4^{6n+3} + 5^{4n+1} = 3^2 + 4^3 + 5^1 = 9 + 64 + 5 = 78 = 6 \times 13$.

P_0 est donc vraie.

Supposons maintenant que, pour un entier naturel n quelconque fixé, P_n soit vraie, c'est à dire que $3^{6n+2} + 4^{6n+3} + 5^{4n+1}$ soit un multiple de 13. On peut donc écrire : $3^{6n+2} + 4^{6n+3} + 5^{4n+1} = 13k$, où k est un entier naturel.

On s'intéresse à : $3^{6(n+1)+2} + 4^{6(n+1)+3} + 5^{4(n+1)+1}$.

On a :

$$\begin{aligned} 3^{6(n+1)+2} + 4^{6(n+1)+3} + 5^{4(n+1)+1} &= 3^{6n+6+2} + 4^{6n+6+3} + 5^{4n+4+1} \\ &= 3^6 \times 3^{6n+2} + 4^6 \times 4^{6n+3} + 5^4 \times 5^{4n+1} \\ &= 729 \times 3^{6n+2} + 4096 \times 4^{6n+3} + 625 \times 5^{4n+1} \\ &= (728+1) \times 3^{6n+2} + (4095+1) \times 4^{6n+3} + (624+1) \times 5^{4n+1} \\ &= (56 \times 13 + 1) \times 3^{6n+2} + (315 \times 13 + 1) \times 4^{6n+3} + (48 \times 13 + 1) \times 5^{4n+1} \\ &= 13 \times [56 \times 3^{6n+2} + 315 \times 4^{6n+3} + 48 \times 5^{4n+1}] + 3^{6n+2} + 4^{6n+3} + 5^{4n+1} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il vient alors :

$$\begin{aligned} 3^{6(n+1)+2} + 4^{6(n+1)+3} + 5^{4(n+1)+1} &= 13 \times [56 \times 3^{6n+2} + 315 \times 4^{6n+3} + 48 \times 5^{4n+1}] + 13k \\ &= 13 \times [56 \times 3^{6n+2} + 315 \times 4^{6n+3} + 48 \times 5^{4n+1} + k] \end{aligned}$$

On en conclut que $3^{6(n+1)+2} + 4^{6(n+1)+3} + 5^{4(n+1)+1}$ est également un multiple de 13.

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Résultat final

$\forall n \in \mathbb{N}, 3^{6n+2} + 4^{6n+3} + 5^{4n+1}$ est un multiple de 13.