On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$$

Démontrer par récurrence que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 3$$

Analyse

Une récurrence standard, application directe du cours …

Résolution

On considère ici la propriété P_n « $u_n < 3$ ».

Notons, dans un premier temps que l'on a facilement : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ qui est bien inférieur à 3.
P_0 est donc vraie.

Soit maintenant un entier naturel *n* quelconque fixé. On suppose que P_n est vraie, c'est à dire que u_n est strictement inférieur à 3 : $u_n < 3$.

Il vient alors : $2u_n < 6$, puis $2u_n + 3 < 9$.
La fonction racine carrée étant strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, il vient alors : $\sqrt{2u_n + 3} < \sqrt{9}$, c'est à dire : $u_{n+1} < 3$.

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Résultat final

Pour la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 3$$