Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + ... + n\times(n+1)$$

Démontrer par récurrence que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Analyse

Une récurrence standard, application directe du cours …

Résolution

On considère ici la propriété P_n « $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ».

Pour $n = 0$, on a : $S_0 = 1\times 2 = 2$ et $\dfrac{1\times(1+1)\times(1+2)}{3} = \dfrac{1\times 2\times 3}{3} = 2$.

P_0 est donc vraie.

Soit maintenant un entier naturel n quelconque fixé . On suppose que P_n est vraie, c'est à dire que S_n est égale à $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

On a donc : $1\times 2 + 2\times 3 + ... + n\times(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

On s'intéresse à : S_{n+1}.

On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \underbrace{1\times 2 + 2\times 3 + ... + n\times(n+1)}_{S_n} + (n+1)\times(n+2) \\ &= S_n + (n+1)\times(n+2) \end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)\times(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)\times(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right) \\ &= (n+1)(n+2)\frac{n+3}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + n\times(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$