Démontrer par récurrence que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 6^n - 1 \text{ est divisible par } 5$$

Analyse

Une récurrence standard, application directe du cours …

Résolution

On considère ici la propriété P_n « $6^n - 1$ est divisible par 5 ».

Pour $n = 0$, on a : $6^n - 1 = 6^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. 0 est bien divisible par 5.

P_0 est donc vraie.

Soit maintenant un entier naturel n quelconque fixé. On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $6^n - 1$ est divisible par 5.
On peut donc écrire : $6^n - 1 = 5p$ où p est un entier.

On a alors :

$$6^{n+1} - 1 = 6 \times 6^n - 1 = 6 \times \underbrace{(5p+1)}_{\text{hypothèse de récurrence}} - 1 = 6 \times 5p + 6 - 1 = 6 \times 5p + 5 = 5 \times (6p+1)$$

Le résultat obtenu est bien divisible par 5 ; la proposition P_{n+1} est donc vraie.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 6^n - 1 \text{ est divisible par } 5.$$