On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 9}{u_n + 5}$$

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est bornée par 0 et 2.
(on commencera par montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$).

Analyse

Dans cet exercice, on cherche en fait à montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2$.
Dans un premier temps, une récurrence standard permet d'établir la première inégalité ainsi que suggéré dans l'énoncé. La deuxième ne nécessite pas tant de travail …

Résolution

Comme suggéré par l'énoncé, considérons la proposition : P_n « $0 \leq u_n$ ».

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ qui est bien un nombre positif.

P_0 est donc vraie.

Soit maintenant un entier naturel n quelconque fixé. On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $0 \leq u_n$.

On a alors : $2u_n + 9 \geq 9$ et $u_n + 5 \geq 5$.
u_{n+1} est ainsi le rapport de deux nombres strictement positifs, c'est un nombre positif.
La proposition P_{n+1} est donc vraie.

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

Considérons alors la proposition Q_n « $u_n \leq 2$ ».

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ qui est bien inférieur à 2.

P_0 est donc vraie.

Soit maintenant un entier naturel *n* quelconque fixé . On suppose que Q_n est vraie.

On a alors :

$$2-u_{n+1}=2-\frac{2u_n+9}{u_n+5}=\frac{2(u_n+5)-(2u_n+9)}{u_n+5}=\frac{1}{u_n+5}$$

Or, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq 0$. La différence $2-u_{n+1}$ est donc positive et on en déduit : $u_{n+1} \leq 2$ (on remarque que l'on n'a pas utilisé l'hypothèse de récurrence à proprement parler).

La proposition Q_{n+1} est donc vraie et on a, finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2$$

Des deux résultats précédents, on tire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2$$

La suite (u_n) est bien bornée par 0 et 2.

Résultat final

La suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=\frac{2u_n+9}{u_n+5}$, est bornée par 0 et 2.