Déterminer la somme des n premiers nombres pairs puis celle des n premiers nombres impairs.

Analyse

Dans cet exercice, il convient fondamentalement de poser proprement les calculs des sommes demandées. On fait alors facilement apparaître des sommes connues.

Résolution

Un entier naturel pair est de la forme $2k$ avec k entier naturel. En notant $S_p(n)$ la première somme et en tenant compte du fait que le premier entier pair considéré est 0, il vient :

$$S_p(n)=0+2+4+\ldots+2(n-1)=\sum_{k=0}^{n-1}2k$$

En factorisant par 2, il vient facilement :

$$S_p(n)=\sum_{k=0}^{n-1}2k=2\sum_{k=0}^{n-1}k$$

$\sum_{k=0}^{n-1}k$ est une somme classique du cours : $\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{(n-1)n}{2}$. On en déduit alors :

$$S_p(n)=2\sum_{k=0}^{n-1}k=2\times\frac{(n-1)n}{2}=(n-1)n$$

Finalement :

$$\boxed{S_p(n)=(n-1)n}$$

On procède de façon analogue pour les nombres impairs. On note cette fois $S_i(n)$ la somme cherchée :

$$S_i(n)=1+3+5+\ldots+(2(n-1)+1)=1+3+5+\ldots+(2n-1)=\sum_{k=0}^{n-1}(2k-1)$$

La somme $S_i(n)$ peut être écrite sous la forme :

$$S_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n-1}2k + \sum_{k=0}^{n-1}1$$

La première somme n'est rien d'autre que la somme précédemment calculée. Quant à la deuxième, elle vaut simplement *n*. On a donc :

$$S_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1}2k + \sum_{k=0}^{n-1}1 = (n-1)n + n = n^2$$

Finalement :

$$\boxed{S_i(n) = n^2}$$

Résultat final

La somme des n premiers nombres pairs est égale à n^2 diminué de *n* et la somme des *n* premiers nombres impairs est égale à n^2.