Calculer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

Analyse

L'exercice fait appel aux connaissances sur les sommes de termes consécutifs des suites géométriques et sur les limites des suites géométriques.

Résolution

D'après les premiers termes de la somme, on constate que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a alors, en tenant compte de $2^n = \left(\sqrt{2}^2\right)^n = \sqrt{2}^{2n} = \left(-\sqrt{2}\right)^{2n}$:

$$\begin{aligned}
u_n &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 + \ldots + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} \\
&= \frac{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\left[1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] \\
&= \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$ appartenant à l'intervalle ouvert $]-1;1[$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ puis, par multiplication et addition : $\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=1+0=1$.

On en déduit alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left\{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\right\} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Résultat final

La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.