Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[5\sin(7n)-3n\right]$$

Analyse

Il convient ici d'exploiter le fait que la fonction sinus est bornée, caractéristique qui peut être exploitée de diverses façons …

Résolution

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$5\sin(7n)-3n=n\left[5\frac{\sin(7n)}{n}-3\right]$$

Or, pour tout entier naturel *n*, on a :

$$-1\leq\sin(7n)\leq 1$$

D'où :

$$-5\leq 5\sin(7n)\leq 5$$

Remarque : on aurait pu donner ici un encadrement à l'aide d'inégalité stricte puisque pour tout entier naturel n, le produit $7n$ ne peut être égal à un multiple de $\frac{\pi}{2}$ modulo π …

Et enfin :

$$-\frac{5}{n}\leq 5\frac{\sin(7n)}{n}\leq\frac{5}{n}$$

On a immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{5}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n}=0$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors d'en déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[5\frac{\sin(7n)}{n}\right]=0$.

Il vient alors (addition) : $\lim_{n\to+\infty}\left[5\frac{\sin(7n)}{n}-3\right]=-3$ et enfin (multiplication) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[5\sin(7n)-3n\right]=\lim_{n\to+\infty}\left\{n\left[5\frac{\sin(7n)}{n}-3\right]\right\}=-\infty$$

A partir de la double inégalité : $-5\leq 5\sin(7n)\leq 5$, on pouvait aussi écrire :

$$-5-3n\leq 5\sin(7n)-3n\leq 5-3n$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(-5-3n)=\lim_{n\to+\infty}(5-3n)=-\infty$, le théorème des gendarmes nous permettait de conclure immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[5\sin(7n)-3n\right]=-\infty$$

Résultat final

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\left[5\sin(7n)-3n\right]=-\infty}$$