Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(3x)$.

Pour tout entier naturel *n*, on note $f^{(n)}$ la dérivée *n*ième de *f* (remarque : $f^{(0)}=f$).

Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel *n* :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Rappel : pour tout *x* réel, on a : $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

Analyse

On mène une récurrence classique, le rappel facilitant grandement la deuxième partie du raisonnement (hérédité) … On prendra garde d'établir soigneusement les égalités et de ne pas les poser d'emblée.

Résolution

Initialisation

Pour $n=0$ et pour tout *x* réel, on a :

$$3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)=3^0\sin\left(3x+0\times\frac{\pi}{2}\right)=1\times\sin(3x)=\sin(3x)=f(x)=f^{(0)}(x)$$

La propriété est ainsi vérifiée au rang 0.

Hérédité

Soit *n* un entier naturel quelconque fixé.

Nous supposons la propriété vraie à ce rang, c'est-à-dire :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Dans ces conditions, on a, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= 3^n \times 3\cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3^{n+1}\sin\left(3x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3^{n+1}\sin\left(3x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

La propriété est ainsi vérifiée au rang $n+1$. Elle est donc héréditaire.

Finalement, pour tout entier naturel n :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Résultat final

Pour tout entier naturel n :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

où $f(x) = \sin(3x)$