

Montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^n e^{k^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{n^2}$$

Analyse

On a affaire à des expressions non nulles pour toute valeur de l'entier n . On obtient alors l'équivalence en utilisant la définition de deux suites équivalentes.

Résolution

Pour tout entier naturel n , posons : $u_n = \sum_{k=0}^n e^{k^2}$ et $v_n = e^{n^2}$. Les deux suites ainsi définies sont des suites à termes strictement positifs (et donc non nuls). On a donc :

$$\sum_{k=0}^n e^{k^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{n^2} \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n e^{k^2}}{e^{n^2}} = 1$$

On a : $\sum_{k=0}^n e^{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2} + e^{n^2}$.

Il vient donc : $\frac{\sum_{k=0}^n e^{k^2}}{e^{n^2}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2} + e^{n^2}}{e^{n^2}} = 1 + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2}}{e^{n^2}}$.

Pour tout entier naturel k dans $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a : $1 \leq e^{k^2} \leq e^{(n-1)^2}$ (croissance des fonctions carrée et exponentielle sur \mathbb{R}_+). Il vient donc :

$$0 \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2}}{e^{n^2}} \leq \frac{n \times e^{(n-1)^2}}{e^{n^2}} = n \frac{e^{n^2 - 2n + 1}}{e^{n^2}} = n e^{-2n+1} = \frac{en}{e^{2n}}$$

Par croissance comparée, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{2n}{e^{2n}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{N}{e^N} = 0$$

Soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2}}{e^{n^2}} = 0$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{en}{e^{2n}}\right) = 1$ et, finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n e^{k^2}}{e^{n^2}} = 1$$

Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

$$\sum_{k=0}^n e^{k^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{n^2}$$