On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Etudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). En déduire la nature de la suite (u_n).

Analyse

Un exercice classique permettant d'établir simplement que la série harmonique alternée converge.

Résolution

On a d'abord, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
u_{2(n+1)} - u_{2n} &= u_{2n+2} - u_{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)+1} \\
&= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-(2n+3)+(2n+2)}{(2n+2)(2n+3)} \\
&= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0
\end{aligned}$$

On en tire immédiatement que la suite (u_{2n}) est strictement décroissante.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} &= u_{2n+3} - u_{2n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)+1} \\
&= \frac{1}{2n+3} + \frac{-1}{2n+4} = \frac{(2n+4)-(2n+3)}{(2n+3)(2n+4)} \\
&= \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} > 0
\end{aligned}$$

On en tire immédiatement que la suite (u_{2n+1}) est strictement croissante.

Enfin :

$$\begin{aligned} u_{2n+1} - u_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)+1} \\ &= \frac{-1}{2n+2} \end{aligned}$$

On a alors : $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n+1} - u_{2n}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2n+2}\right) = 0$.

Comme les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont (strictement) monotones, de monotonies inverses, et comme $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$, on en déduit que ces deux suites sont adjacentes. De fait, elles sont convergentes et admettent la même limite qui est également la limite de la suite (u_n).

Résultat final

La suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, est convergente.