

Soit  $\theta$  un réel tel que  $\theta \neq 0(\pi)$ .

Montrer que les suites  $(\cos(n\theta))$  et  $(\sin(n\theta))$  divergent.

---

## Analyse

Un exercice classique que l'on peut traiter de diverses façons. Nous menons ici un raisonnement par l'absurde après avoir établi au préalable que la convergence de l'une des deux suites entraîne celle de l'autre.

---

## Résolution

Pour tout  $n$  entier naturel, on a les relations :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \quad (1)$$

$$\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta) \quad (2)$$

Puisque  $\theta \neq 0(\pi)$ , on a :  $\sin(\theta) \neq 0$  et les égalités se récrivent :

$$\sin(n\theta) = \frac{\cos(n\theta)\cos(\theta) - \cos((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\cos(n\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Ainsi, si l'on suppose que la suite  $(\cos(n\theta))$  converge, la première égalité nous permet de conclure immédiatement que la suite  $(\sin(n\theta))$  converge également. De façon analogue, si l'on suppose que la suite  $(\sin(n\theta))$  converge, c'est cette fois la deuxième égalité qui nous permet de conclure que la suite  $(\cos(n\theta))$  converge également.

Nous supposons donc que l'une des suites  $(\cos(n\theta))$  et  $(\sin(n\theta))$  converge. D'après ce qui précède, elles convergent toutes les deux.

Notons alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n\theta)) = \alpha$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(n\theta)) = \beta$ .

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos((n+1)\theta) = \alpha$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin((n+1)\theta) = \beta$ .

En passant aux limites, les égalités (1) et (2) donnent alors le système :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) \\ \beta = \alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} (1 - \cos(\theta))\alpha + \sin(\theta)\beta = 0 \\ \sin(\theta)\alpha + (\cos(\theta) - 1)\beta = 0 \end{cases}$$

Le déterminant associé à ce système vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - 1 \end{vmatrix} = -[1 - \cos(\theta)]^2 - \sin^2(\theta) = -1 + 2\cos(\theta) - 1 = 2[\cos(\theta) - 1]$$

Il est non nul puisque  $\theta \neq 0(\pi) \Rightarrow \theta \neq 0(2\pi) \Leftrightarrow \cos(\theta) \neq 1$ .

Il vient alors immédiatement :  $\alpha = \beta = 0$ .

Mais pour tout entier naturel  $n$ , on a la relation fondamentale :  $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$ . La fonction carrée étant continue sur  $\mathbb{R}$ , on obtient, en passant à la limite :  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , relation incompatible avec les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  que nous venons d'obtenir.

Les suites  $(\cos(n\theta))$  et  $(\sin(n\theta))$  ne sont pas convergentes.

---

## Résultat final

Pour tout réel  $\theta \neq 0(\pi)$ , les suites  $(\cos(n\theta))$  et  $(\sin(n\theta))$  divergent.