Soit (u_n) une suite réelle convergente.

Que peut-on dire de la suite $(\mathrm{E}(u_n))$?

Analyse

La fonction partie entière confère aux entiers un rôle particulier puisqu'en ces points elle est discontinue. Cette remarque initiale permet de mener la discussion.

Résolution

Notons : $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$.

Nous allons distinguer deux situations suivant que L est ou non un entier.

1^er^ cas : L n'est pas entier ($L \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$).

On a donc : $\mathrm{E}(L) < L < \mathrm{E}(L)+1$.

Soit alors $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\left(L-\mathrm{E}(L), \mathrm{E}(L)+1-L\right)$.

On a : $\mathrm{E}(L) < L-\varepsilon < L < L+\varepsilon < \mathrm{E}(L)+1$.

Pour tout ε strictement positif tel que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, on pourra trouver un entier N tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, on a : $u_n \in [L-\varepsilon, L+\varepsilon]$. On a alors : $\mathrm{E}(u_n) = \mathrm{E}(L)$ et on en déduit dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{E}(u_n)\right) = \mathrm{E}(L) = \mathrm{E}\left(\lim_{n\to+\infty}(u_n)\right)$$

On pouvait également utiliser le théorème suivant du cours :

Si la suite (u_n) converge vers L et si une fonction f, définie sur un voisinage de L, est continue en L alors $\left(f(u_n)\right)$ converge vers $f(L)$.

En tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue et on peut donc appliquer le théorème.

2ème cas : L est entier ($L \in \mathbb{Z}$).

Puisque la suite (u_n) converge vers L, on sait qu'il existe un rang N (prendre $\varepsilon = 1$) au-delà duquel tous les termes seront dans l'intervalle $]L-1; L+1[$. La partie entière d'un tel terme vaudra donc $L-1$ ou L. Ainsi, contrairement au cas précédent, la suite peut ne pas converger, converger vers $L-1$ ou vers L.

A titre d'illustration, on peut considérer les trois suites : (x_n), (y_n) et (z_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n},\ y_n = 3 - \frac{1}{n} \text{ et } z_n = 3 + \frac{1}{n}$$

On a facilement : $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} z_n = 3$.

Pour autant, les termes de la suite $(\mathrm{E}(x_n))$ valent alternativement 2 et 3 (en fait, les suites extraites $(\mathrm{E}(x_{2n}))$ et $(\mathrm{E}(x_{2n+1}))$ sont constantes et prennent comme valeurs respectives 3 et 2 qui sont les deux valeurs d'adhérence de la suite $(\mathrm{E}(x_n))$).
La suite $(\mathrm{E}(x_n))$ est donc divergente.

A contrario, pour tout n entier naturel non nul, on a : $y_n \in [2;3[$ et donc : $\mathrm{E}(y_n) = 2$.
La suite $(\mathrm{E}(y_n))$ converge et admet pour limite : $2 = \lim_{n \to +\infty} y_n - 1$.

Enfin, pour tout n entier naturel dans $\mathbb{N} - \{0;1\}$, on a $z_n \in]3;4[$ et donc $\mathrm{E}(z_n) = 3$.
La suite $(\mathrm{E}(z_n))$ converge et admet pour limite : $3 = \lim_{n \to +\infty} z_n$.

Résultat final

Si (u_n) est une suite réelle convergeant vers L alors :

- Si $L \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la suite $(\mathrm{E}(x_n))$ converge vers $\mathrm{E}(L)$: $\lim_{n \to +\infty} (\mathrm{E}(u_n)) = \mathrm{E}\left(\lim_{n \to +\infty} (u_n)\right)$;
- Si $L \in \mathbb{Z}$, la suite $(\mathrm{E}(x_n))$ peut diverger ou converger (vers $L-1$ ou vers L).