

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

1. a) Montrer que  $(u_n)$  est majorée par 4.  
b) Montrer que  $(u_n)$  est strictement croissante.  
c) En déduire que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

- b) Retrouver le résultat du 1. c).
- c) Etudier la convergence de la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = n^2(4 - u_n)$$

---

## Analyse

On a ici affaire à une suite récurrente où  $u_{n+1}$  est de la forme  $f(u_n)$  avec  $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ .

La question 1. est classique et conduit à établir la convergence de la suite grâce à un théorème majeur du cours. La seconde question est plus délicate et consiste en comparaisons de suites et de suites géométriques ...

---

## Résolution

### Question 1. a)

Nous allons établir un encadrement par récurrence.

Posons :  $\mathcal{P}_n$  : «  $0 \leq u_n < 4$  ».

#### Initialisation

Comme  $u_0 = 0 < 4$ , la propriété  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

### Hérédité

On considère un entier naturel  $n$  quelconque fixé et on suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

On a donc :  $0 \leq u_n < 4$ .

On en déduit immédiatement :  $3 \times 0 + 4 \leq 3u_n + 4 < 3 \times 4 + 4 = 16$ , soit :  $4 \leq 3u_n + 4 < 16$ .

D'où :  $2 \leq \sqrt{3u_n + 4} < 4$ . On a bien :  $0 \leq u_{n+1} < 4$ .

La propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie.

Finalement :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 4$ .

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$$

Remarque : on a établi :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 4$ . En fait, notre calcul nous permet de conclure que l'on a :  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 4$ .

### *Question 1. b)*

Nous nous intéressons à la différence :  $u_{n+1} - u_n$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a, la somme  $u_{n+1} + u_n$  ne pouvant être nulle (cf. la remarque ci-dessus,  $u_0$  est le seul terme nul de la suite et tous les autres sont strictement positifs), on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)}{u_{n+1} + u_n} = \frac{(\sqrt{3u_n + 4} - u_n)(\sqrt{3u_n + 4} + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

D'après la question précédente, le dénominateur  $u_{n+1} + u_n = \sqrt{3u_n + 4} + u_n$  est strictement positif. Le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$  est donc celui de  $3u_n + 4 - u_n^2$ .

On a facilement :  $-x^2 + 3x + 4 = -(x+1)(x-4)$ , d'où :

$$3u_n + 4 - u_n^2 = -(u_n + 1)(u_n - 4) = (u_n + 1)(4 - u_n).$$

D'après la question précédente, on a :  $4 - u_n > 0$ . Comme  $u_n \geq 0 \Rightarrow u_n + 1 \geq 1 > 0$ , on a finalement  $(u_n + 1)(4 - u_n) > 0$  et donc  $u_{n+1} - u_n > 0$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

### Question 1. c)

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante et majorée, elle est donc convergente. Notons  $L$  sa limite.

On a :  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ .

Or :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ .

Par ailleurs, comme la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 0, on a :  $L \geq 0$ . La fonction  $f$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(L)$ .

Ainsi, la limite  $L$  vérifie :  $f(L) = L$ .

Pour déterminer  $L$  on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} f(L) = L \\ L \geq 0 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(L) = L \\ L \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3L+4} = L \\ L \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3L+4 = L^2 \\ L \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L^2 - 3L - 4 = 0 \\ L \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L+1)(L-4) = 0 \\ L \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow L = 4 \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 4.

### Question 2. a)

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4} = \frac{(4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4})}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{16 - (3u_n + 4)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$$

A la question 1.a), on a vu que l'on avait  $\sqrt{3u_n + 4} \geq 2$ , pour tout entier naturel  $n$ .

On en déduit :  $4 + \sqrt{3u_n + 4} \geq 6$  et enfin :  $\frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{6}$ .

Il vient alors :  $4 - u_{n+1} = \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{6} \times 3(4 - u_n) = \frac{1}{2}(4 - u_n)$ .

Le résultat est ainsi établi.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

*Question 2. b)*

D'après la question précédente, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$ .

Pour tout  $n$  strictement positif, on a alors, classiquement :

$$0 < 4 - u_n \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 (4 - u_{n-2}) \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Il convient, en toute rigueur, d'établir le résultat par récurrence.

Posons :  $\mathcal{P}_n : \ll 4 - u_n \leq 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n \gg$ .

Initialisation

Comme  $u_0 = 0$ , on a :  $4 - u_0 = 4$ .

Par ailleurs :  $4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 4 \times 1 = 4$ .

D'où :  $4 - u_0 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^0$ . La propriété  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

Hérédité

On considère un entier naturel  $n$  quelconque fixé et on suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

On a donc :  $4 - u_n \leq 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

D'après la question précédente, on a :  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$ .

On déduit de ces deux inégalités :  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2} \times 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ .

La propriété est donc héréditaire.

En définitive, la propriété est vraie pour tout entier naturel  $n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4 - u_n \leq 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'après la question 1.a), il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < 4 - u_n \leq 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme la suite  $\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2} \in ]-1; +1[$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$ .

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$$

D'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ . On a ainsi retrouvé le résultat de la question 1.c).

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 4.

### Question 2. c)

Remarquons d'abord que nous ne pouvons conclure directement puisque l'on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et, d'après la question précédente :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$ . Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type «  $\infty \times 0$  ».

Nous allons raisonner avec  $n$  entier naturel non nul (ainsi,  $v_n > 0$ ) et allons nous inspirer de la question précédente.

$$\text{On a : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^2 (4 - u_{n+1})}{n^2 (4 - u_n)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n}.$$

On a immédiatement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$  et, la fonction carrée étant continue en 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Il existe donc un rang  $N$  tel que :  $n \geq N \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$ .

Pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à  $N$  on a alors, en tenant compte du résultat obtenu à la question 2.a) :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} \leq \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Soit,  $v_n$  étant strictement positif :  $v_{n+1} \leq \frac{3}{4} v_n$ .

Remarque : nous avons choisi ci-dessus la valeur  $\frac{3}{2}$  car son produit par  $\frac{1}{2}$  donne un résultat strictement inférieur à 1. Tout autre valeur strictement positive donnant un produit strictement inférieur à 1 aurait également convenu.

En raisonnant comme à la question précédente (nous ne redonnons pas tous les détails), on obtient :

$$n \geq N \Rightarrow v_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} v_N$$

(La démonstration rigoureuse par récurrence conduit à initier le raisonnement au rang  $N$ )

On a finalement, en tenant compte du signe de  $v_n$  :

$$n \geq N \Rightarrow 0 \leq v_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} v_N$$

Comme la suite  $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} v_N\right)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq N}}$  est géométrique de raison  $\frac{3}{4} \in ]-1; +1[$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} v_N \right] = 0.$$

Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.