Un raisonnement par récurrence va nous permettre de « démontrer » que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, n points quelconques (deux à deux distincts) du plan sont alignés !

Un tel raisonnement est clairement faux puisque le résultat général l'est ! Voici, cependant, le raisonnement :

On considère les propriétés :

$$\mathscr{P}_n : \text{« } n \text{ points quelconques } \left(\text{deux } \textit{à} \text{ deux distincts}\right) \text{ du plan sont alignés »}$$

<u>Initialisation</u>
Deux points distincts quelconques du plan sont trivialement alignés.
La propriété $\mathscr{P}_2$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>
Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.
Nous supposons la propriété $\mathscr{P}_n$ vraie.
Soit alors $n+1$ points quelconques du plan, $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}$ deux à deux distincts.

D'après l'hypothèse de récurrence, les n points $P_1, P_2, ..., P_n$ sont alignés. Ils le sont donc sur la droite (P_2P_n).
De façon similaire, les n points $P_2, ..., P_n, P_{n+1}$ sont alignés. Il le sont donc également sur la droite (P_2P_n).
On en déduit ainsi que les points $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}$ appartiennent à la même droite : ils sont alignés ! La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie …

Saurez-vous trouver la faille dans ce « joli » raisonnement ?

Analyse

Une fois n'est pas coutume, il s'agit donc ici de … raisonner sur un raisonnement ! Il n'est pas nécessaire d'être un(e) spécialiste du raisonnement par récurrence ou de la géométrie pour s'en sortir ! En revanche, il convient de faire attention aux détails qui sont parfois moins … anodins qu'on pourrait le croire …

Résolution

L'initialisation du raisonnement est correcte ! N'en doutons pas. La difficulté doit donc se situer au niveau de l'hérédité.

En l'occurrence, les notations sont assez piégeuses : dans les raisonnements par récurrence on a parfois tendance à abuser des pointillés et le lecteur (la lectrice) à se faire abuser par eux ! On ne saurait trop se demander comment s'écrit une expression comportant des pointillés lorsque *n* est petit.

Reprenons : l'élément-clé permettant de conclure au niveau de l'hérédité est cette « fameuse » droite (P_2P_n). Bien évidemment, lorsque l'on désigne par « $P_1, P_2, ..., P_n$ » *n* points, on ne se pose pas trop de questions sur le nombre de points effectivement mentionnés et il semble « évident » que l'on puisse « parler » tranquillement de la droite (P_2P_n) … Mais est-ce VRAIMENT toujours le cas ?

Bien sûr que non !
Si $n = 2$, tout tombe à l'eau ! Votre droite « (P_2P_n) » … n'en est pas une ! Dans ce cas, le fait que P_1 et P_2 sont alignés, d'une part, et que P_2 et P_3 le sont également, d'autre part, ne permet en rien de conclure que P_1, P_2 et P_3 sont alignés !

L'hérédité serait donc appropriée pour *n* plus grand que 3 ! Cette partie-là du raisonnement serait alors valable (eh oui !) Mais le raisonnement dans sa globalité nécessiterait alors, pour être valable, que la propriété $\mathscr{P}_3$ soit vraie ; là, vous conviendrez qu'une difficulté apparaît car le problème de l'alignement se pose véritablement (et définitivement !) dès lors que l'on considère 3 points ! ☺