Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel *n* non nul et tous réels $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2 \leq n\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$$

Analyse

Cette inégalité est très intéressante à bien des égards en analyse dans l'enseignement supérieur, moins en Terminale. On se propose de la démontrer ici par récurrence mais on peut également y parvenir autrement. Le raisonnement ne pose pas de grosse difficulté (dès lors que l'on garde présent à l'esprit qu'il faut très souvent, dans les raisonnements par récurrence, essayer de se ramener à l'hypothèse de récurrence) mais le formalisme littéral n'est pas pour plaire à la majorité des élèves …

Résolution

Considérons, pour tout entier naturel n non nul la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

$\mathcal{P}_n$: « Pour tous réels $x_1, x_2, ..., x_n$ on a : $\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2 \leq n\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$ »

<u>Initialisation :</u>

Pour tout *x* réel, on a immédiatement : $\left(x\right)^2 = x^2 \leq 1\times x^2$.
La propriété $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.

<u>Hérédité :</u>

Soit *n* un entier naturel non nul quelconque fixé.
On suppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : pour tous réels $x_1, x_2, ..., x_n$, $\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2 \leq n\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$. On s'intéresse à la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

On se donne donc $n+1$ réels : $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$.
On a :

$$\begin{aligned}\left(x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}\right)^2 &= \left[\left(x_1+x_2+...+x_n\right)+x_{n+1}\right]^2 \\ &= \left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2 + 2x_{n+1}\left(x_1+x_2+...+x_n\right)+x_{n+1}^2\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$(n+1)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_{n+1}^2\right)=n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)+\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)+(n+1)\,x_{n+1}^2$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&(n+1)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_{n+1}^2\right)-\left(x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}\right)^2\\
&=n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)+\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)+(n+1)\,x_{n+1}^2\\
&\qquad-\left[\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2+2x_{n+1}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)+x_{n+1}^2\right]\\
&=\left[n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)-\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2\right]+\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\\
&\qquad-2x_{n+1}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)+nx_{n+1}^2\\
&=\left[n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)-\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2\right]\\
&\qquad+\left(x_{n+1}^2-2x_1x_{n+1}+x_1^2\right)+\left(x_{n+1}^2-2x_2x_{n+1}+x_2^2\right)+\ldots+\left(x_{n+1}^2-2x_nx_{n+1}+x_n^2\right)\\
&=\left[n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)-\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2\right]\\
&\qquad+\left(x_{n+1}-x_1\right)^2+\left(x_{n+1}-x_2\right)^2+\ldots+\left(x_{n+1}-x_n\right)^2
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)-\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2\geq 0$.

Par ailleurs, la somme des carrées $\left(x_{n+1}-x_1\right)^2+\left(x_{n+1}-x_2\right)^2+\ldots+\left(x_{n+1}-x_n\right)^2$ est positive.

On en déduit que la différence $(n+1)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_{n+1}^2\right)-\left(x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}\right)^2$ est positive.

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion générale : la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* non nul.

Résultat final

Pour tout entier naturel *n* non nul et tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on a :

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2\leq n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)$$