

Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Analyse

Cette inégalité est intéressante puisqu'elle permet, par exemple, d'établir que la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est convergente (croissante et majorée par 2, puisque l'on a, pour tout entier naturel n non nul : $2 - \frac{1}{n} < 2$). D'ailleurs, on a « classiquement » :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Résolution

Considérons, pour tout entier naturel n non nul la propriété \mathcal{P}_n suivante :

$$\mathcal{P}_n : \left\langle \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \right\rangle$$

Initialisation :

Pour : $n = 1$, on a : $\frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$ et $2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$.

L'inégalité (on a l'égalité en fait) est vérifiée. La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

Hérédité :

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose que la propriété \mathcal{P}_n est vraie, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

On s'intéresse à la propriété \mathcal{P}_{n+1} .

On considère donc la somme : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on, a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} &\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 2 - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] \\ &= 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} \\ &= 2 - \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \frac{n^2 + n}{n(n+1)^2} \\ &= 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

Conclusion générale : la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Résultat final

Pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$