

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{30} \\ u_{n+1} = \sqrt{30 + u_n} \end{cases}$$

1. Donner les valeurs exactes et des valeurs approchées de u_1 , u_2 et u_3 et u_4 .
2. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0.
3. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 6.
4. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
5. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
6. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a :

$$|u_{n+1} - 6| \leq \frac{|u_n - 6|}{\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6}$$

7. Dédire de la question précédente que, pour tout entier naturel n , on a :

$$|u_n - 6| \leq \frac{|u_0 - 6|}{\left(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6\right)^n}$$

8. Déterminer un entier naturel N telle que pour tout n supérieur ou égal à N , on ait : $|u_n - 6| \leq 10^{-9}$.

Analyse

Une récurrence classique du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où les premières questions (jusqu'à la 5, comprise) visent à permettre l'utilisation d'un théorème de convergence du cours et à déterminer la limite de la suite considérée. Dans un deuxième temps (questions 6, 7 et 8), on obtient une majoration de la différence (en valeur absolue) entre un terme quelconque et la limite. La dernière question, application numérique, permet de se faire une meilleure idée de la rapidité de la convergence.

Résolution

Partie A

Question 1.

On a facilement :

$$\begin{aligned}u_1 &= \sqrt{30+u_0} = \sqrt{30+\sqrt{30}} \approx 5,956\,275 \\u_2 &= \sqrt{30+u_1} = \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}} \approx 5,996\,355 \\u_3 &= \sqrt{30+u_2} = \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}} \approx 5,999\,696 \\u_4 &= \sqrt{30+u_3} = \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}}} \approx 5,999\,975\end{aligned}$$

Question 2.

Nous menons un raisonnement par récurrence pour établir : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Initialisation.

On a : $u_0 = \sqrt{30} > 0$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité.

Soit n un entier naturel quelconque fixé.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n . On suppose donc : $u_n \geq 0$.

On a alors : $30 + u_n \geq 30 > 0$ et on en déduit immédiatement : $u_{n+1} = \sqrt{30 + u_n} \geq \sqrt{30} > 0$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion.

La propriété est vraie pour tout n entier naturel.

La suite (u_n) est minorée par 0.

Question 3.

Nous menons un raisonnement par récurrence pour établir : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 6$.

Initialisation.

On a : $u_0^2 = 30 < 36$. D'où : $u_0 < \sqrt{36} = 6$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité.

Soit n un entier naturel quelconque fixé.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n . On suppose donc : $u_n \leq 6$.

On a alors : $u_{n+1}^2 = 30 + u_n \leq 30 + 6 = 36$ et on en déduit immédiatement : $u_{n+1} \leq 6$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion.

La propriété est vraie pour tout n entier naturel.

La suite $(u_n)_n$ est majorée par 6.

Question 4.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 30 + u_n - u_n^2$$

Comme $-x^2 + x + 30 = (x+5)(6-x)$, on a donc : $30 + u_n - u_n^2 = (u_n + 5)(6 - u_n)$.

D'où :

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 30 + u_n - u_n^2 = (u_n + 5)(6 - u_n)$$

On a d'abord (question 2) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 5 > 0_n$.

Par ailleurs (question 3) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 6$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, 6 - u_n \geq 0$.

En définitive, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 0_n$, soit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 \geq u_n^2$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$, il vient finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

Le résultat est ainsi établi.

La suite (u_n) est croissante.

Question 5.

La suite (u_n) étant croissante (question 4) et majorée (question 3), elle est convergente.

Notons L sa limite.

Comme (u_n) est minorée par 0 et majorée par 6, on a finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 6$$

On en déduit immédiatement : $0 \leq L \leq 6$.

On a aussi : $u_{n+1} = \sqrt{30 + u_n}$, d'où : $u_{n+1}^2 = 30 + u_n$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. La fonction carrée étant continue sur \mathbb{R} , il vient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = L^2$$

Par ailleurs : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \overset{\text{somme}}{(30 + u_n)} = 30 + L$.

On a donc finalement :

$$L^2 = 30 + L$$

On a vu plus haut (question 4) que l'équation $-x^2 + x + 30 = 0$ admettait -5 et 6 comme racines. Comme on a $0 \leq L \leq 6$, 6 est la seule valeur acceptable. Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$$

Remarque : historiquement, on se plaisait à écrire :

$$\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}}}} = 6$$

Question 6.

Pour tout n entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 6| &= \left| \sqrt{30 + u_n} - 6 \right| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{30 + u_n} - 6)(\sqrt{30 + u_n} + 6)}{\sqrt{30 + u_n} + 6} \right| \\ &= \frac{|30 + u_n - 36|}{\sqrt{30 + u_n} + 6} \\ &= \frac{|u_n - 6|}{\sqrt{30 + u_n} + 6} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $u_0 = \sqrt{30}$ et comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{30}$.

On en tire alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 30 + u_n \geq 30 + \sqrt{30}$ puis $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{30 + u_n} + 6 \geq \sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6 > 0$

et enfin : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{30 + u_n} + 6} \leq \frac{1}{\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6}$.

On a donc :

$$|u_{n+1} - 6| = \frac{|u_n - 6|}{\sqrt{30 + u_n} + 6} \leq \frac{|u_n - 6|}{\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 6| \leq \frac{|u_n - 6|}{\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6}$$

Question 7.

Nous allons établir ce résultat par récurrence.

Initialisation.

On a bien sûr : $|u_0 - 6| = \frac{|u_0 - 6|}{(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6)^0} \leq \frac{|u_0 - 6|}{(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6)^0}$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité.

Soit maintenant n un entier naturel quelconque fixé. On suppose que la propriété est vraie au

rang n , c'est-à-dire : $|u_n - 6| \leq \frac{|u_0 - 6|}{(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6)^n}$.

En utilisant le résultat de la question précédente, on a alors :

$$|u_{n+1} - 6| \leq \frac{|u_n - 6|}{\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6} \leq \frac{1}{\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6} \times \frac{|u_0 - 6|}{(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6)^n} = \frac{|u_0 - 6|}{(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6)^{n+1}}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Elle est héréditaire.

Conclusion.

La propriété est vraie pour tout entier naturel n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 6| \leq \frac{|u_0 - 6|}{\left(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6\right)^n}$$

Question 8.

On veut $|u_n - 6| \leq 10^{-9}$. En utilisant le résultat de la question précédente, cette inégalité sera

vérifiée si on a : $\frac{|u_0 - 6|}{\left(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6\right)^n} \leq 10^{-9}$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{|u_0 - 6|}{\left(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6\right)^n} &\leq 10^{-9} \\ \Leftrightarrow |u_0 - 6| 10^9 &\leq \left(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6\right)^n \\ \Leftrightarrow |\sqrt{30} - 6| 10^9 &\leq \left(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6\right)^n \\ \Leftrightarrow \ln\left(|\sqrt{30} - 6| 10^9\right) &\leq n \ln\left(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6\right) \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln\left(|\sqrt{30} - 6| 10^9\right)}{\ln\left(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6\right)} \end{aligned}$$

Or, on a : $\frac{\ln\left(|\sqrt{30} - 6| 10^9\right)}{\ln\left(\sqrt{30 + \sqrt{30}} + 6\right)} \approx 9,0185$. On choisit donc $N = 10$.

Pour $N = 10$, on a : $n \geq N \Rightarrow |u_n - 6| \leq 10^{-9}$.