On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}} \end{cases}$$

En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer que la suite (u_n) est convergente.

Analyse

Une récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où les premières questions où la fonction considérée est strictement décroissante. On mène alors classiquement l'étude des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Résolution

Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}} = \varphi(u_{n-1}) \text{ avec } \varphi : x \mapsto \sqrt{2 - x}$$

La fonction φ est définie sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ et elle y est strictement décroissante comme composée d'une fonction strictement décroissante (la fonction affine $x \mapsto 2 - x$) et d'une fonction strictement croissante (la fonction racine carrée).

On en déduit immédiatement que la fonction $\varphi \circ \varphi$ est strictement croissante. D'où l'idée (suggérée dans l'énoncé) d'étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui, du fait de la croissance de $\varphi \circ \varphi$, sont monotones.

Pour déterminer la monotonie de (u_{2n}), il suffit de comparer u_2 et $u_4 = (\varphi \circ \varphi)(u_2)$.

Comme : $u_2 = \varphi(u_1) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ et $u_4 = \varphi(u_3) = \sqrt{2 - \sqrt{u_3}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}$ et comme la fonction φ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$, on va d'abord comparer u_1 et $u_3 = (\varphi \circ \varphi)(u_1)$ (cette comparaison nous servira ensuite pour l'étude de la suite (u_{2n+1})).

On a : $u_3 = (\varphi\circ\varphi)(u_1) = \varphi(\varphi(u_1)) = \varphi\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

Les réels u_1 et u_3 étant positifs, comparons leurs carrés.

On a : $u_1^2 = 2$ et $u_3^2 = 2-\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

On en déduit immédiatement : $u_3^2 < u_1^2$ et donc : $u_3 < u_1$.

Ainsi, on en conclut que la suite (u_{2n+1}) est strictement décroissante.

Comme on a : $u_1 = \sqrt{2} > 0$ et $\forall x \in \left]0\,;2\right], \varphi(x) \geq 0$, on en déduit que la suite (u_n) est positive. Il en va de même pour la suite (u_{2n+1}) qui est donc minorée par 0.

→ La suite (u_{2n+1}) étant décroissante et minorée, elle converge.

On a vu que l'on avait : $u_3 < u_1$.

La fonction φ étant strictement décroissante, on en tire : $\varphi(u_3) < \varphi(u_1)$, soit : $u_4 > u_2$.

La croissance (stricte) de la fonction $\varphi\circ\varphi$ nous permet alors de conclure que la suite (u_{2n}) est (strictement) croissante.

Or, on montre facilement par récurrence que la suite (u_n) est majorée par $\sqrt{2}$.

Comme $u_1 = \sqrt{2}$, l'initialisation est immédiate.

Soit alors *n* un entier naturel non nul quelconque et supposons que l'on ait : $u_n \leq \sqrt{2}$.

Comme on a : $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$, il vient : $\varphi(0) \geq \varphi(u_n) \geq \varphi\left(\sqrt{2}\right)$. Soit : $\sqrt{2} \geq u_{n+1} \geq \varphi\left(\sqrt{2}\right)$.

La propriété est bien héréditaire.

La suite (u_n) est donc majorée. Il va donc de même pour la suite (u_{2n}).

→ La suite (u_{2n}) étant croissante et majorée, elle converge.

Notons *L* et L' les limites respectives des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Comme la fonction $\varphi\circ\varphi$ est continue, on a :

$$L = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+2} = \lim_{n\to+\infty} (\varphi\circ\varphi)(u_{2n}) = (\varphi\circ\varphi)\left(\lim_{n\to+\infty} u_{2n}\right) = (\varphi\circ\varphi)(L)$$

Par ailleurs, comme on a, pour tout entier naturel *n* non nul : $0 \leq u_{2n} \leq \sqrt{2}$, on en déduit que l'on a aussi : $0 \leq L \leq \sqrt{2}$.

Ainsi, la limite *L* est un point fixe de la fonction $\varphi\circ\varphi$ compris entre 0 et $\sqrt{2}$.

En procédant de façon analogue, on conclut à l'identique sur la limite L'.

Intéressons-nous maintenant aux points fixes de la fonction $\varphi\circ\varphi$.

On cherche donc à résoudre : $(\varphi\circ\varphi)(x) = x$ sur l'intervalle $\left[0\,;\sqrt{2}\right]$.

On a :

$$\begin{cases}(\varphi\circ\varphi)(x)=x\\ x\in\left[0\,;\sqrt{2}\right]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2-\sqrt{2-x}}=x\\ x\in\left[0\,;\sqrt{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-\sqrt{2-x}=x^2\\ x\in\left[0\,;\sqrt{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x^2=\sqrt{2-x}\\ x\in\left[0\,;\sqrt{2}\right]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2-x^2\right)^2=2-x\\ x\in\left[0\,;\sqrt{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-4x^2+x+2=0\\ x\in\left[0\,;\sqrt{2}\right]\end{cases}$$

On constate que la somme des coefficients de x^4-4x^2+x+2 est égale à 0. On en déduit que 1 est solution de l'équation $x^4-4x^2+x+2=0$. On peut donc factoriser par $x-1$ et on obtient : $x^4-4x^2+x+2=(x-1)\left(x^3+x^2-3x-2\right)$.

-2 est racine de x^3+x^2-3x-2 et il vient : $x^3+x^2-3x-2=(x+2)\left(x^2-x-1\right)$.

On a donc : $x^4-4x^2+x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x+2)\left(x^2-x-1\right)=0$.

Enfin, on montre facilement que les racines du trinôme x^2-x-1 valent $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>\sqrt{2}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{cases}x^4-4x^2+x+2=0\\ x\in\left[0\,;\sqrt{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent pour limite commune : 1.

Finalement, la suite (u_n) converge vers 1.

Résultat final

La suite (u_n) définie par $u_1=\sqrt{2}$ et $u_n=\sqrt{2-u_{n-1}}$ (pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2) est convergente de limite égale à 1.

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique des points $(n\,;u_n)$ pour n de 1 à 7.