On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$0 \le u_n \le 1$$
$$0 \le v_n \le 1$$
$$\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = 1$$

Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Analyse

« Evidemment », on ne sait rien de la convergence éventuelle des suites considérées … En revanche, les inégalités fournies constituent des aides très précieuses et doivent nous conduire à essayer d'encadrer u_n et v_n.

Résolution

Comme tous les termes de la suite (u_n) sont positifs, on a, pour tout entier naturel n :

$$0 \le v_n \le 1 \Rightarrow 0 \le u_n v_n \le u_n$$

Comme la suite (u_n) est majorée par 1, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n \le u_n \le 1$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = 1$, le théorème des gendarmes nous permet de conclure :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

De façon similaire, on montre que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$$

Résultat final

Si les suites (u_n) et (v_n) vérifient :

$$0 \leq u_n \leq 1$$
$$0 \leq v_n \leq 1$$
$$\lim_{n \to +\infty} (u_n v_n) = 1$$

alors, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 1$$