On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$$

Montrer que la suite (u_n) converge vers un nombre irrationnel.

Analyse

On peut s'inspirer de la démarche (classique) consistant à établir que la suite de terme générale $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers un réel irrationnel (il s'agir de e).

Résolution

Notons, dans un premier temps, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} > 0$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Par ailleurs, pour tout entier naturel k, on a : $\frac{1}{2^k k!} \leq \frac{1}{k!}$ et donc, pour tout entier naturel n :

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, soit : $u_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Or, on a classiquement : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

La suite (u_n) est donc majorée (par e).

La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.
Nous notons L sa limite.

Pour montrer que le réel L n'est pas rationnel, nous introduisons la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \frac{1}{2^n n!}$$

Pour tout n entier naturel, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}-\left(u_n+\frac{1}{2^n n!}\right)\\
&=(u_{n+1}-u_n)+\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}-\frac{1}{2^n n!}\\
&=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}+\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}-\frac{1}{2^n n!}\\
&=\frac{2}{2^{n+1}(n+1)!}-\frac{1}{2^n n!}\\
&=\frac{1}{2^n(n+1)!}-\frac{1}{2^n n!}\\
&=\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}$$

Comme $(n+1)!\geq n!$, on a : $\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}\leq 0$ et on en déduit que la suite (v_n) est décroissante.

Enfin, on a immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n n!}=0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.
On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Elles admettent donc une limite commune. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=L$, on a finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=L$$

et : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n<L<u_n+\frac{1}{2^n n!}$.

Supposons que la limite L soit un réel rationnel. Posons $L=\frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux.
Avec l'entier q, l'inégalité précédente s'écrit : $u_q<\frac{p}{q}<u_q+\frac{1}{2^q q!}$. D'où :

$$2^q q!u_q<2^q q!\frac{p}{q}<2^q q!u_q+1$$

Or : $2^q q!u_q=2^q q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{2^k k!}=\sum_{k=0}^{q}\frac{2^q q!}{2^k k!}=\sum_{k=0}^{q}2^{q-k}q\times(q-1)\times\ldots\times(k+1)$.
On en déduit : $2^q q!u_q\in\mathbb{N}$.

On a ainsi encadré l'entier $2^q q!\frac{p}{q} = 2^q (q-1)!\, p$ par deux entiers naturels consécutifs. Les inégalités étant strictes ce résultat est absurde.

Le réel L n'est donc pas rationnel.

Résultat final

La suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$ est convergente

et admet pour limite un réel irrationnel.