On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(5+3^n\right)^2 - \left(5-3^n\right)^2$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2. Formuler alors une conjecturer sur la nature de la suite (u_n).
2. Démontrer la conjecture de la question précédente.

Analyse

Encore un exercice visant à identifier une suite géométrique « derrière » une expression qui n'y fait pas nécessairement penser de prime abord …

Résolution

Question 1.

On a facilement :

$$u_0 = \left(5+3^0\right)^2 - \left(5-3^0\right)^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = \boxed{20}$$

$$u_1 = \left(5+3^1\right)^2 - \left(5-3^1\right)^2 = 8^2 - 2^2 = 64 - 4 = \boxed{60}$$

$$u_2 = \left(5+3^2\right)^2 - \left(5-3^2\right)^2 = 14^2 - \left(-4\right)^2 = 196 - 16 = \boxed{180}$$

On constate que l'on a : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0} = 3$.

Nous formulons la conjecture suivante : la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3.

Question 2.

Pour tout n entier naturel, on a, en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(5+3^n\right)^2 - \left(5-3^n\right)^2 \\
&= \left[\left(5+3^n\right)+\left(5-3^n\right)\right]\times\left[\left(5+3^n\right)-\left(5-3^n\right)\right] \\
&= \left(5+\cancel{3^n}+5-\cancel{3^n}\right)\times\left(\cancel{5}+3^n-\cancel{5}+3^n\right) \\
&= 10\times 2\times 3^n \\
&= 20\times 3^n
\end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi conclure que la suite (u_n) est effectivement une suite géométrique de raison 3.

Résultat final

La suite de terme général $u_n = \left(5+3^n\right)^2 - \left(5-3^n\right)^2$
est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 20$.