On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+2n+1}$$

1. Combien la somme ci-dessus comporte-t-elle de termes ? Quel est le plus grand ? Le plus petit ?
2. Déduire de la question précédente un encadrement de u_n pour tout entier naturel n non nul puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Analyse

De plus en plus de termes … eux-mêmes de plus en plus petits ! Une situation générale classique qui conduit à bien des résultats ! Dans cet exercice, on peut facilement encadrer u_n (ce n'est pas toujours le cas !) et en déduire la limite de la suite.

Résolution

Question 1.

Chaque terme de la somme est de la forme $\frac{1}{n^2+k}$ où k est un entier naturel. On obtient tous les termes en faisant varier k de 1 à $2n+1$. La somme $\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+2n+1}$ comporte donc $2n+1$ termes.

On a immédiatement : $n^2+1 < n^2+2 < \ldots < n^2+2n+1$ et on en déduit :

$$\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{n^2+2} > \ldots > \frac{1}{n^2+2n+1}$$

Le plus petit terme de la somme est donc $\frac{1}{n^2+2n+1}$ et le plus grand $\frac{1}{n^2+1}$.

Pour tout entier naturel n non nul, la somme $u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+2n+1}$ comporte $2n+1$ termes. Le plus petit est $\frac{1}{n^2+2n+1}$ et le plus grand $\frac{1}{n^2+1}$.

Question 2.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel k compris entre 1 et $2n+1$, on a :

$$\frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

En sommant membre à membre ces $2n+1$ inégalités doubles, on obtient :

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+2n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+2n+1}}_{2n+1\text{ termes égaux}} \leq \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+2n+1} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}}_{2n+1\text{ termes égaux}}$$

Soit : $\dfrac{2n+1}{n^2+2n+1} \leq u_n \leq \dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{2n+1}{n^2+2n+1} = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1$.

On en déduit (rapport) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{2}{1} = 2$ puis (produit) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0 \times 2 = 0$.

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n^2+2n+1} = 0$.

Remarque : on trouve ce résultat plus rapidement en utilisant le théorème sur la limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle. Ici : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n^2+2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$.

De façon similaire, on montre : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n^2+1} = 0$.

On déduit (théorème d'encadrement ou « des gendarmes ») des deux résultats obtenus que la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$