

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

1. Combien la somme ci-dessus comporte-t-elle de termes ? Quel est le plus grand ? Le plus petit ?
2. Dédurre de la question précédente un encadrement de u_n pour tout entier naturel n non nul puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Analyse

De plus en plus de termes ... eux-mêmes de plus en plus petits ! Une situation générale classique qui conduit à bien des résultats ! Dans cet exercice, on peut facilement encadrer u_n (ce n'est pas toujours le cas !) et en déduire la limite de la suite.

Résolution

Question 1.

Chaque terme de la somme est de la forme $\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$ où k est un entier naturel. On obtient tous

les termes en faisant varier k de 1 à n . La somme $\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ comporte donc n termes.

On a immédiatement : $n^4+1 < n^4+2 < \dots < n^4+n$, puis $\sqrt{n^4+1} < \sqrt{n^4+2} < \dots < \sqrt{n^4+n}$ et on en déduit :

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} > \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} > \dots > \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

Le plus petit terme de la somme est donc $\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ et le plus grand $\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$.

Pour tout entier naturel n non nul, la somme $\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ comporte n termes. Le plus petit est $\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ et le plus grand $\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$.

Question 2.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel k compris entre 1 et n , on a :

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$

En sommant membre à membre ces n inégalités doubles, on obtient :

$$\underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}}_{n \text{ termes égaux}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}}_{n \text{ termes égaux}}$$

Soit : $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} = \frac{n^2}{\sqrt{n^4 \left(1 + \frac{n}{n^4}\right)}} = \frac{n^2}{n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 1 + 0 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} = 1$.

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} = 1$.

De façon similaire, on montre : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} = 1$.

On déduit (théorème d'encadrement ou « des gendarmes ») des deux résultats obtenus que la suite (u_n) est convergente de limite égale à 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$