Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

Pour n entier naturel, on considère la propriété :

$$\mathscr{P}_n \text{ : « } u_n \geq 2^n \text{ »}$$

1. Montrer que la propriété est héréditaire.
2. Pour quelles valeurs de n, $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie ?

Analyse

L'hérédité est un résultat précieux mais … ne garantit rien ! Fort heureusement, la suite est ici suffisamment « sympathique » pour que la propriété $\mathscr{P}_n$ soit effectivement vraie à partir d'un rang petit. La comparaison d'une suite à étudier avec une suite simple (ici la suite géométrique de raison 2 et de premier terme égal à 1) est souvent très utile.

Résolution

Question 1.

Soit N un entier naturel.
On suppose que la propriété $\mathscr{P}_N$ est vraie, c'est-à-dire : $u_N \geq 2^N$.
On veut montrer que $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie, c'est-à-dire : $u_{N+1} \geq 2^{N+1}$.

On a : $u_{N+1} = u_N^2 + 1$ et, hypothèse de récurrence : $u_N \geq 2^N$.
Mais comme $2^N > 0$ et comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$u_N^2 \geq \left(2^N\right)^2$$

Puis : $u_N^2 + 1 \geq \left(2^N\right)^2 + 1$, c'est-à-dire : $u_{N+1} \geq \left(2^N\right)^2 + 1$.

On a alors : $\left(2^N\right)^2 + 1 - 2^{N+1} = \left(2^N\right)^2 - 2 \times 2^N + 1 = \left(2^N - 1\right)^2 \geq 0$.

On en déduit donc $\left(2^N\right)^2 + 1 \geq 2^{N+1}$ et, finalement : $u_{N+1} \geq 2^{N+1}$.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie.

La propriété $\mathscr{P}_n$: « $u_n \geq 2^n$ » est héréditaire.

Question 2.

On obtient facilement (pas nécessairement à la calculatrice ! ☺) :

n	u_n	2^n
0	0	1
1	1	2
2	2	4
3	5	8
4	26	16

On a donc $u_4 \geq 2^4$. La propriété $\mathscr{P}_4$ est donc vraie.
On en déduit finalement, grâce à la question précédente :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 : $u_n \geq 2^n$.