Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

Montrer que pour tout n entier naturel, u_n est inférieur ou égal à 2.

Analyse

Une récurrence très simple qui permet d'établir que la suite (u_n) est majorée (par 2).

Résolution

Pour tout n entier naturel, on pose :

$$\mathscr{P}_n : « u_n \leq 2 »$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1 \leq 2$. La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit N un entier naturel quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie, c'est-à-dire : $u_N \leq 2$.

On a donc : $u_N + 1 \leq 2 + 1 = 3$, d'où, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $\sqrt{u_N + 1} \leq \sqrt{3} \leq 2$. On a bien : $u_{N+1} \leq 2$.
Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Résultat final

Pour tout entier naturel n : $u_n \leq 2$.