Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

Montrer que pour tout *n* entier naturel, u_n est strictement inférieur à 6.

Analyse

Une récurrence très simple qui permet d'établir que la suite (u_n) est majorée (par 6).

Résolution

Pour tout *n* entier naturel, on pose :

$$\mathscr{P}_n : « \ u_n < 6 \ »$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = -2 < 6$. La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *N* un entier naturel quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie, c'est-à-dire : $u_N < 6$.

On a donc : $\frac{1}{2}u_N < \frac{1}{2}\times 6 = 3$ puis $\frac{1}{2}u_N + 3 < 3 + 3 = 6$. On a bien : $u_{N+1} < 6$.
Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Résultat final

Pour tout entier naturel n : $u_n < 6$.

Remarque : on aboutit à la même conclusion pour tout réel u_0 strictement inférieur à 6.