Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 10 \end{cases}$$

Montrer que pour tout *n* entier naturel, on a :

$$u_n = 5 - 2\times 3^n$$

Analyse

Une récurrence simple qui permet d'obtenir explicitement u_n en fonction de *n*.

Résolution

Pour tout *n* entier naturel, on pose :

$$\mathscr{P}_n : « \ u_n = 5 - 2\times 3^n \ »$$

<u>Initialisation</u>

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 3$.
Par ailleurs : $5 - 2\times 3^n = 5 - 2\times 3^0 = 5 - 2\times 1 = 3$.

La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *N* un entier naturel quelconque fixé.
On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie, c'est-à-dire : $u_N = 5 - 2\times 3^N$.
On veut montrer que $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie, c'est-à-dire : $u_{N+1} = 5 - 2\times 3^{N+1}$.

D'après la définition de la suite (u_n) et l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$u_{N+1} = 3u_N - 10 = 3\times\left(5 - 2\times 3^N\right) - 10 = 15 - 2\times 3\times 3^N - 10 = 5 - 2\times 3^{N+1}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>

La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Résultat final

Pour tout entier naturel n : $u_n = 5 - 2 \times 3^n$.