Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{17n^3-76n^2+17n-89}{15n^4-51} \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(5\sqrt{n}-3n^2\sqrt{n}+11n^3\right)$$

Analyse

Pour chacune des limites demandées, on a intérêt à commencer par une analyse … Dans le premier cas, on a affaire à une fonction rationnelle de la variable *n*. Dans ce cas, une méthode classique est connue. Dans le second cas l'expression ressemble à celle d'un polynôme mais la racine carrée rend les choses un peu plus délicates. Mais pas beaucoup plus !

Résolution

→ $\lim_{n\to+\infty}\frac{17n^3-76n^2+17n-89}{15n^4-51}$

Remarque : nous effectuons ci-dessous le calcul sans faire appel au théorème des termes de plus haut degré applicable aux suites de la forme $u_n=f(n)$ où *f* est une fonction rationnelle, ce théorème n'étant plus au programme de la Terminale S depuis la rentrée 2012.
Avec ce théorème, signalons que l'on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{17n^3-76n^2+17n-89}{15n^4-51}=\lim_{n\to+\infty}\frac{17n^3}{15n^4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{17}{15n}=0$$

Voyons maintenant comment procéder sans …

On peut, <u>mais ça n'est pas obligatoire</u>, procéder à une analyse pour commencer.

En tenant compte de $\lim_{n\to+\infty}n=\lim_{n\to+\infty}n^2=\lim_{n\to+\infty}n^3=+\infty$, on a facilement, au numérateur :

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}17n^3=+\infty\\ \lim_{n\to+\infty}17n=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty}\left(17n^3+17n\right)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}\left(-76n^2\right)=-\infty\\ \lim_{n\to+\infty}\left(-89\right)=-89\end{array}\right\}\overset{\text{somme}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty}\left(-76n^2-89\right)=-\infty$$

Au numérateur, nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

Au dénominateur, on a :

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty} 15n^4 = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty}(-51) = -51\end{array}\right\} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty}\left(15n^4-51\right) = +\infty$$

La suite proposée étant une fonction rationnelle de la variable entière n, nous factorisons classiquement, au numérateur et au dénominateur, par le terme de plus haut degré.
Pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{17n^3-76n^2+17n-89}{15n^4-51} = \frac{17n^3\left(1-\frac{76n^2}{17n^3}+\frac{17n}{17n^3}-\frac{89}{17n^3}\right)}{15n^4\left(1-\frac{51}{15n^4}\right)} = \frac{17}{15n}\times\frac{1-\frac{76}{17n}+\frac{17}{17n^2}-\frac{89}{17n^3}}{1-\frac{51}{15n^4}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}$, on a (addition) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{76}{17n}+\frac{17}{17n^2}-\frac{89}{17n^3}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{51}{15n^4}\right) = 1$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{76}{17n}+\frac{17}{17n^2}-\frac{89}{17n^3}\right) = 1 \\ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{51}{15n^4}\right) = 1\end{array}\right\} \overset{\text{division}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{76}{17n}+\frac{17}{17n^2}-\frac{89}{17n^3}}{1-\frac{51}{15n^4}} = 1$$

Et enfin :

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{76}{17n}+\frac{17}{17n^2}-\frac{89}{17n^3}}{1-\frac{51}{15n^4}} = 1 \\ \lim_{n\to+\infty}\frac{17}{15n} = 0\end{array}\right\} \overset{\text{multiplication}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{17}{15n}\times\frac{1-\frac{76}{17n}+\frac{17}{17n^2}-\frac{89}{17n^3}}{1-\frac{51}{15n^4}}\right) = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{17n^3-76n^2+17n-89}{15n^4-51} = 0}$$

→ $\lim_{n\to+\infty}\left(5\sqrt{n}-3n^2\sqrt{n}+11n^3\right)$

A partir de $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty}n^2 = \lim_{n\to+\infty}n^3 = +\infty$, on a immédiatement (addition) $\lim_{n\to+\infty}\left(5\sqrt{n}+11n^3\right) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(-3n^2\sqrt{n}\right) = -\infty$.

Nous avons donc affaire à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

Pour tout entier naturel n, on a facilement : $\sqrt{n} \leq n^2\sqrt{n} \leq n^3$.
Pour tout entier naturel n non nul, il vient alors :

$$5\sqrt{n} - 3n^2\sqrt{n} + 11n^3 = n^3 \times \left(\frac{5\sqrt{n}}{n^3} - \frac{3n^2\sqrt{n}}{n^3} + \frac{11n^3}{n^3} \right) = n^3 \times \left(\frac{5}{n^2\sqrt{n}} - \frac{3}{\sqrt{n}} + 11 \right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a (multiplication) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} = 0$ puis :

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2\sqrt{n}} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{3}{\sqrt{n}} \right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 11 = 11 \end{array}\right\} \overset{\text{addition}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n^2\sqrt{n}} - \frac{3}{\sqrt{n}} + 11 \right) = 11 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{multiplication}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} \left[n^3 \times \left(\frac{5}{n^2\sqrt{n}} - \frac{3}{\sqrt{n}} + 11 \right) \right] = +\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5\sqrt{n} - 3n^2\sqrt{n} + 11n^3 \right) = +\infty}$$