Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(5^n+3\times0,7^n-7^n\right) \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{2\times11^n-5^n}{-12\times3^n-5\times7^n}$$

Analyse

Chacune des suites correspond à une expression faisant intervenir des opérations simples sur des suites géométriques. On doit donc analyser ces expressions en s'attachant aux raisons des suites géométriques.

Résolution

→ $\lim_{n\to+\infty}\left(5^n+3\times0,7^n-7^n\right)$

Trois suites géométriques interviennent dans l'expression proposée/ Il s'agit des suites : $\left(5^n\right)$, $\left(3\times0,7^n\right)$ et $\left(-7^n\right)$.

Comme 0,7 appartient à l'intervalle $]-1;+1[$, on a immédiatement $\lim_{n\to+\infty}3\times0,7^n=0$.
Par ailleurs, 5 et 7 étant strictement supérieurs à 1, on a : $\lim_{n\to+\infty}5^n=\lim_{n\to+\infty}7^n=+\infty$.
En définitive, nous avons affaire à une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

La plus grande raison étant 7, on a, pour tout entier naturel *n* :

$$5^n-7^n=7^n\times\left(\frac{5^n}{7^n}-1\right)=7^n\times\left(\left(\frac{5}{7}\right)^n-1\right)$$

Comme $\frac{5}{7}$ appartient à l'intervalle $]-1;+1[$, on a immédiatement : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n=0$.

On en déduit (addition) : $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{5}{7}\right)^n-1\right)=-1$.

Finalement :

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{5}{7}\right)^n-1\right)=-1\\ \lim_{n\to+\infty}7^n=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{multiplication}}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}7^n\times\left(\left(\frac{5}{7}\right)^n-1\right)=-\infty\\ \\ \lim_{n\to+\infty}3\times 0,7^n=0\end{array}\right\}\overset{\text{addition}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty}\left[7^n\times\left(\left(\frac{5}{7}\right)^n-1\right)+3\times 0,7^n\right]=-\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(5^n+3\times 0,7^n-7^n\right)=-\infty}$$

→ $\lim_{n\to+\infty}\frac{2\times 11^n-5^n}{-12\times 3^n-5\times 7^n}$

On note que toutes les raisons des suites géométriques apparaissant dans l'expression proposée sont strictement supérieures à 1.

Pour tout entier naturel n :

$$2\times 11^n-5^n=2\times 11^n\times\left(1-\frac{5^n}{2\times 11^n}\right)=2\times 11^n\times\left(1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{11}\right)^n\right)$$

Et :

$$-12\times 3^n-5\times 7^n=-5\times 7^n\times\left(\frac{-12\times 3^n}{-5\times 7^n}+1\right)=-5\times 7^n\times\left(\frac{12}{5}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$\frac{2\times 11^n-5^n}{-12\times 3^n-5\times 7^n}=\frac{2\times 11^n\times\left(1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{11}\right)^n\right)}{-5\times 7^n\times\left(\frac{12}{5}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)}=-\frac{2}{5}\times\left(\frac{11}{7}\right)^n\times\frac{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{11}\right)^n}{\frac{12}{5}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}$$

Comme $\frac{5}{11}$ et $\frac{3}{7}$ appartiennent à l'intervalle $]-1\,;+1[$, on a immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{11}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n=0$$

On en déduit (addition) : $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{11}\right)^n\right)=1$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{12}{5}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)=1$.

Comme $\frac{11}{7}$ est strictement supérieur à 1, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{11}{7}\right)^n=+\infty$ puis $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\times\left(\frac{11}{7}\right)^n\right)=-\infty$.

Finalement :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{11}\right)^n\right)=1\\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{12}{5}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)=1\end{array}\right\}\overset{\text{division}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{11}\right)^n}{\frac{12}{5}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=1\\ \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\times\left(\frac{11}{7}\right)^n\right)=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{multiplication}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\times\left(\frac{11}{7}\right)^n\times\frac{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{11}\right)^n}{\frac{12}{5}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}\right)=-\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{2\times11^n-5^n}{-12\times3^n-5\times7^n}=-\infty}$$