On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Analyse

Dans cet exercice, il convient de se montrer précis et rigoureux quant à l'ordre d'établissement des résultats requis (monotonies puis différence tendant vers 0).

Résolution

On remarque d'abord que les deux suites considérées sont à termes strictement positifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on a $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + \frac{u_n}{n} \Leftrightarrow v_n - u_n = \frac{u_n}{n}$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n > 0$.

On a par ailleurs, pour tout entier naturel n non nul : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} > 1$ et on en déduit immédiatement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

On a également :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)u_{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n} = \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} \times \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \times \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \times \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2} = \frac{(n^2+2n)(n^2+2n+2)}{(n+1)^4} \\
&= \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n}{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}
\end{aligned}$$

Comme n est un entier naturel, on a immédiatement :

$$0 < n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n < n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

D'où : $0 < \dfrac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n}{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1} < 1$, c'est-à-dire : $0 < \dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ et on en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n > 0$. En tenant compte des monotonies des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < v_0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Comme elle est croissante, elle converge.

On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$. On en déduit ainsi que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Résultat final

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$$

sont adjacentes.