

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique de raison r .

Démontrer par récurrence le résultat classique suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Analyse

Classique ? Ultra-classique aurais-je dû écrire ! Tout élève arrivant en Terminale se doit de connaître cette formule voire d'être capable de la redémontrer selon l'approche traditionnelle dont le point de départ consiste à récrire la somme sous la somme initiale en inversant l'ordre des termes :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ S_n &= u_n + u_{n-1} + \dots + u_0 \end{aligned}$$

Mais le résultat, comme demandé dans l'exercice, peut aussi se montrer par récurrence, l'étape un peu « délicate » étant, une fois encore l'hérédité ...

Résolution

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tout n entier naturel, on pose :

$$\mathcal{P}_n : \ll S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} \gg$$

Initialisation

Pour $n = 0$, on a : $S_0 = u_0$ et $(n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} = (0+1) \frac{u_0 + u_0}{2} = u_0$.

Donc \mathcal{P}_0 est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité

Soit maintenant n un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que la propriété \mathcal{P}_n est vraie, c'est-à-dire : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$.

On s'intéresse à \mathcal{P}_{n+1} . On veut montrer que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, c'est-à-dire, que l'on a :

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} = (n+2) \frac{u_0 + u_{n+1}}{2}$$

On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} \\ &= S_n + u_{n+1} \\ &= (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} + u_{n+1} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1) \frac{u_0 + u_{n+1} - r}{2} + u_{n+1} && \text{(car } (u_n) \text{ est une suite arithmétique)} \\ &= \frac{1}{2} \left[(n+1)(u_0 + u_{n+1} - r) + 2u_{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(n+1)u_0 + (n+1)u_{n+1} - (n+1)r + 2u_{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(n+1)u_0 + (n+2)u_{n+1} + u_{n+1} - (n+1)r \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(n+1)u_0 + (n+2)u_{n+1} + \underbrace{u_{n+1} - (n+1)r}_{u_0} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(n+2)u_0 + (n+2)u_{n+1} \right] \\ &= (n+2) \frac{u_0 + u_{n+1}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

Résultat final

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$