Montrer que l'on a :

$$1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\ldots+n^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} n$$

Analyse

Le problème se ramène à un calcul de limite qui apparaît comme celle d'une… moyenne.

Résolution

On va montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\ldots+n^{\frac{1}{n}}}{n}=1$.

Le numérateur du rapport $\dfrac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\ldots+n^{\frac{1}{n}}}{n}$ comportant n termes, il s'agit donc d'une moyenne arithmétique.

On peut ainsi s'intéresser à la suite (u_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=n^{\frac{1}{n}}$. Si cette suite converge vers 1 alors la suite $\left(\dfrac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\ldots+n^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$ convergera également vers 1 (moyenne de Cesaro).

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\ln u_n=\ln n^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}\ln n$.

Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln n=0$. Comme la fonction exponentielle est continue en 0, on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}=e^0=1$. On a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\ldots+n^{\frac{1}{n}}}{n}=1$.

Résultat final

$$1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\ldots+n^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} n$$