Montrer que l'on a :

$$1+2^2+3^3+\ldots+n^n \underset{+\infty}{\sim} n^n$$

Analyse

Nous vous proposons ici deux méthodes que nous vous laissons le loisir de comparer. La seconde fait appel au lemme de Cesaro généralisé et s'avère (comme ici !) puissante dans bien des situations.

Résolution

1ère méthode

On va chercher, classiquement, à montrer que l'on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}=1$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}=\frac{1+2^2+3^3+\ldots+(n-1)^{n-1}}{n^n}+1$$

La somme $1+2^2+3^3+\ldots+(n-1)^{n-1}$ comporte $n-1$ termes, tous inférieurs ou égaux au dernier ($(n-1)^{n-1}$). On a donc : $1+2^2+3^3+\ldots+(n-1)^{n-1} \le (n-1)\times(n-1)^{n-1}=(n-1)^n$.

Et donc : $\frac{1+2^2+3^3+\ldots+(n-1)^{n-1}}{n^n} \le \frac{(n-1)^n}{n^n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Rappelons la limite classique, valable pour tout a réel : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$.

On a donc ici : $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Notre majoration du rapport $\frac{1+2^2+3^3+\ldots+(n-1)^{n-1}}{n^n}$ est donc trop forte…

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1+2^2+3^3+...+(n-1)^{n-1}}{n^n} &= \frac{1+2^2+3^3+...+(n-2)^{n-2}}{n^n}+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\\ &= \frac{1+2^2+3^3+...+(n-2)^{n-2}}{n^n}+\frac{1}{n-1}\times\frac{(n-1)^n}{n^n}\\ &= \frac{1+2^2+3^3+...+(n-2)^{n-2}}{n^n}+\frac{1}{n-1}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

On a vu ci-dessus que l'on avait $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$. On en tire immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n-1}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = 0\times\frac{1}{e} = 0$$

Intéressons-nous donc au rapport : $\frac{1+2^2+3^3+...+(n-2)^{n-2}}{n^n}$.

La somme $1+2^2+3^3+...+(n-2)^{n-2}$ comporte $n-2$ termes tous inférieurs ou égaux à $(n-2)^{n-2}$. On a donc :

$1+2^2+3^3+...+(n-1)^{n-2} \leq (n-2)\times(n-2)^{n-2} = (n-2)^{n-1} = \frac{1}{n-2}\times(n-2)^n$.

Puis : $\frac{1+2^2+3^3+...+(n-2)^{n-2}}{n^n} \leq \frac{\frac{1}{n-2}\times(n-2)^n}{n^n} = \frac{1}{n-2}\times\frac{(n-2)^n}{n^n} = \frac{1}{n-2}\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$, il vient : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n-2}\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right) = 0\times\frac{1}{e^2} = 0$.

Finalement, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$0 < \frac{1+2^2+3^3+...+n^n}{n^n} \leq 1+\frac{1}{n-1}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{n-2}\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$$

avec : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n-1}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n-2}\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right) = 0$.

On a alors $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{n-2}\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right) = 1$ et le théorème d'encadrement nous permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2^2+3^3+...+n^n}{n^n} = 1$$

Le résultat est établi.

2^ème méthode

On cherche à mettre en œuvre la généralisation du lemme de Cesaro.

On cherche donc à écrire le rapport $\dfrac{1+2^2+3^3+...+n^n}{n^n}$ sous la forme $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}$ avec (u_n) convergente (en l'occurrence vers 1 ici…) et $\sum \alpha_n$ divergente avec $\alpha_n \geq 0$ (soit $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = +\infty$).

Pour faire apparaître une somme au dénominateur, on peut poser :

$$n^n = \left(n^n-(n-1)^{n-1}\right)+\left((n-1)^{n-1}-(n-2)^{n-2}\right)+...+\left(3^3-2^2\right)+\left(2^2-1\right)+1$$

Soit : $\alpha_1 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\alpha_k = k^k-(k-1)^{k-1}$.

La série $\sum \alpha_n$ est bien sûr divergente puisque l'on a : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty$.

On pose ensuite : $\alpha_k u_k = k^k$.

Pour $k=1$, il a $u_1 = \dfrac{1^1}{\alpha_1} = \dfrac{1}{1} = 1$ et pour k supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{k^k}{\alpha_k} = \frac{k^k}{k^k-(k-1)^{k-1}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{k^k-(k-1)^{k-1}}{k^k}} = \frac{1}{1-\dfrac{(k-1)^{k-1}}{k^k}} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{k-1}\times\dfrac{(k-1)^k}{k^k}} \\ &= \frac{1}{1-\dfrac{1}{k-1}\times\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^k} \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a : $\lim_{k\to+\infty}\left(\dfrac{1}{k-1}\times\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^k\right) = 0\times\dfrac{1}{e} = 0$ et on en tire :

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{k-1}\times\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{1-0} = 1$$

En définitive, on a : $\dfrac{1+2^2+3^3+...+n^n}{n^n}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}$ avec :

- $\alpha_1 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\alpha_k = k^k - (k-1)^{k-1}$.
- $\sum \alpha_n$ divergente.
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

D'après la généralisation du lemme de Cesaro, on en conclut alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2^2+3^3+...+n^n}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}=\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

On a retrouvé le résultat.

Résultat final

$$1+2^2+3^3+...+n^n \underset{+\infty}{\sim} n^n$$