Soit (a_n) et (a_n) deux suites à termes strictement positifs, et vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^n = a > 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n^n = b > 0$$

Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $p+q=1$.

Déterminer : $\lim_{n\to+\infty}\left(pa_n+qb_n\right)^n$.

Analyse

On s'affranchit des « problèmes » liés à l'exposant grâce au logarithme népérien. Des développements limités simples au voisinage de l'infini permettent des manipulations aisées des expressions alors obtenues.

Résolution

Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n^n = a$ et comme la fonction logarithme népérien est continue en a, il vient :
$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(a_n^n\right) = \ln a$, c'est-à-dire : $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(a_n\right) = \ln a$.

On a donc, au voisinage de $+\infty$: $n\ln\left(a_n\right) = \ln a + \mathrm{o}(1)$, soit encore : $\ln\left(a_n\right) = \frac{\ln a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a enfin : $a_n = \exp\left(\ln\left(a_n\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\ln a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

De façon analogue, on obtient : $b_n = 1 + \frac{\ln b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Alors :

$$\begin{aligned}
pa_n + qb_n &= p\left(1 + \frac{\ln a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + q\left(1 + \frac{\ln b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= p + q + \left(p\ln a + q\ln b\right)\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= 1 + \left(p\ln a + q\ln b\right)\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= 1 + \frac{\ln\left(a^p b^q\right)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
n\ln\left(pa_n+qb_n\right) &= n\ln\left(1+\frac{\ln\left(a^p b^q\right)}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= n\left(\frac{\ln\left(a^p b^q\right)}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ln\left(a^p b^q\right)+\mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

On a donc : $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(pa_n+qb_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(pa_n+qb_n\right)^n=\ln\left(a^p b^q\right)$, et enfin, en tenant compte de la continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(pa_n+qb_n\right)^n=\exp\left(\ln\left(a^p b^q\right)\right)=a^p b^q$$

Résultat final

$$\lim_{n\to+\infty}\left(pa_n+qb_n\right)^n=a^p b^q$$